Outstanding Academic Works on Economics by Nobel Prize Winners
诺贝尔经济学奖获奖者学术精品自选集



SOCIAL CHOICE: MANY INDIVIDUALS OR MANY CRITERIA

by

K.J. ARROW

社会选择：个性与多准则

[美] 肯尼思·约瑟夫·阿罗 著
钱晓敏 孟岳良 译

首都经济贸易大学出版社

诺贝尔经济学奖获奖者学术精品自选集

据我所知，此套丛书是首次尝试系统地出版所有获奖者的重要著作。丛书的出版本身就具有重大的意义，在中国面世其意义更加深远。我希望它的出版不仅有助于经济学的发展，而且能直接推动中国经济的发展。

［瑞典］诺贝尔经济学奖评奖委员会

—— 托尔斯滕·珀森



ISBN 7-5638-0840-X/F·458

定价：21.00元

SOCIAL CHOICE:
MANY INDIVIDUALS OR
MANY CRITERIA

社会选择：个性与多准则

[美] 肯尼思·约瑟夫·阿罗 著
钱晓敏 孟岳良 译
张尧庭 钟 路 审校

首都经济贸易大学出版社

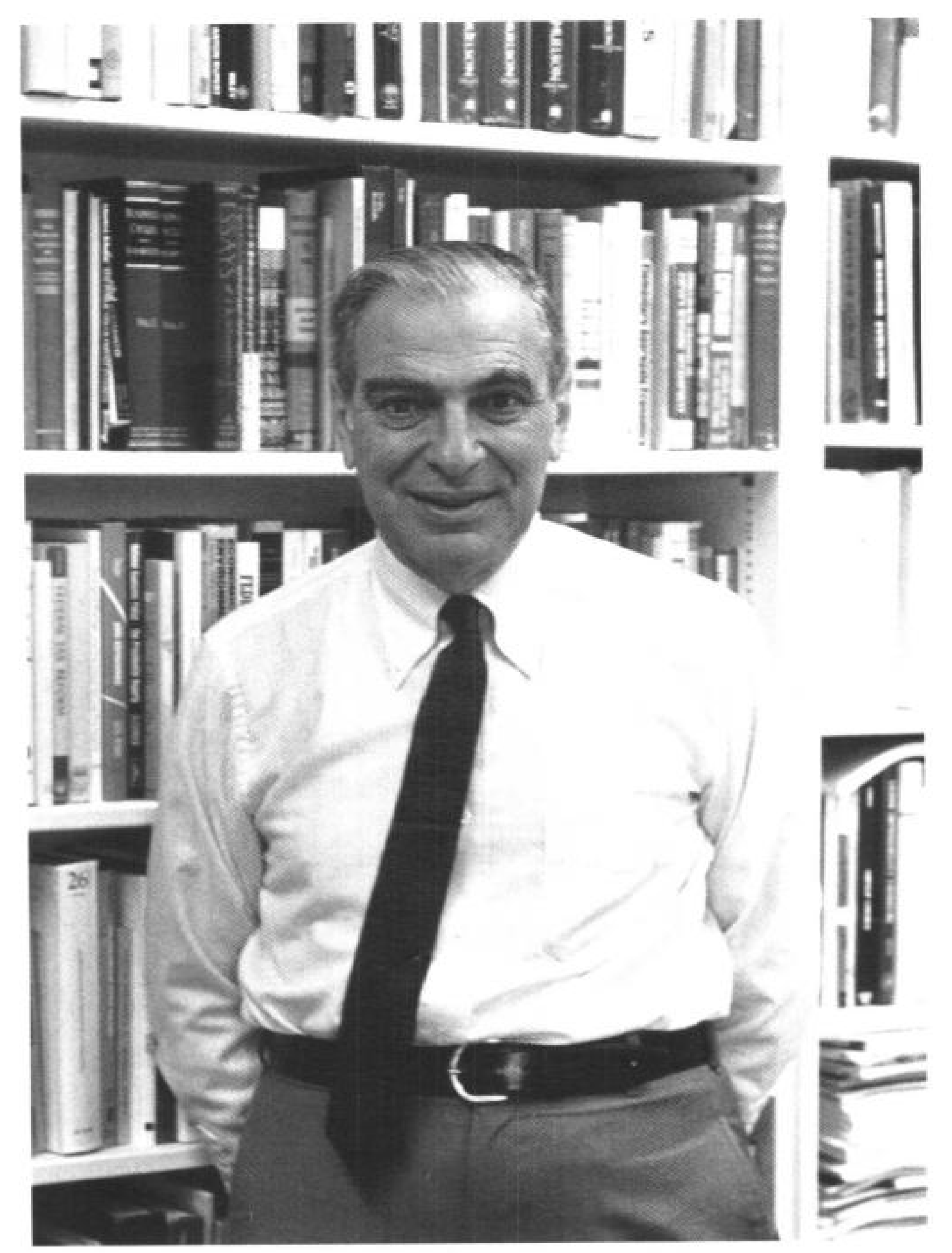
根据 Yale University 出版社 1970 年版和 MIT 出版社 1986 年版翻译

图书在版编目(CIP)数据

社会选择:个性与多准则/(美)阿罗(Arrow,K.J.)著;钱晓敏等译.-北京:首都经济贸易大学出版社,2000.3
(诺贝尔经济学奖获奖者学术精品自选集)
书名原文:Social Choice:Many Individuals or Many Criteria
ISBN 7-5638-0840-X

Ⅰ.社… Ⅱ.①阿…②钱… Ⅲ.公共选择(经济学)-原则-研究 Ⅳ.F019.5
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 02047 号

首都经济贸易大学出版社出版发行
(北京市朝阳区红庙)
北京宏飞印刷厂印刷
全国新华书店经销
850×1168 毫米 32 开本 10.125 印张 244 千字
2000 年 3 月第 1 版 2000 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 7-5638-0840-X/F·458
著作权合同登记号
图字:01-99-1489 号
定价:21.00 元



肯尼思·约瑟夫·阿罗 Kenneth Joseph Arrow （1921～ ）

美国斯坦福大学教授。1972年因其在“一般均衡理论和社会福利经济学”方面的杰出贡献，荣获诺贝尔经济学奖。

出版说明

1968年在瑞典中央银行成立300周年之际，为纪念诺贝尔奖奖金提供者，由时任行长艾斯伯林克等人倡议，并经瑞典皇家科学院批准，设立了“纪念阿尔弗雷德·诺贝尔瑞典中央银行经济学奖”。该奖由瑞典皇家科学院委任的5～8名经济学家组成“经济科学委员会”(即奖项委员会)，负责在全球范围内对入围的经济学家进行遴选并将评选意见提交科学院社会科学部，最终确定桂冠的得主。由于该奖项与诺贝尔遗嘱所设立的物理学奖、化学奖、生物医学奖、文学奖以及和平奖以同样的时间、同样的奖金额颁发，故被世人习惯地称为“诺贝尔经济学奖”。

1936年，英国经济学家约翰·梅纳德·凯恩斯发表了划时代的名著——《就业利息和货币通论》，标志着现代经济学的诞生。然而，在诺贝尔经济学奖设立以前，人们对能否称经济学为科学尚怀有极大的疑问，即使在艾斯伯林克等人提出设立经济学奖时，也遭到许多名人的反对。他们认为，经济学作为一门社会科学，以它的

价值判断为基础,其成就难以用一定的客观标准来衡量。因此,尽管经济学的研究成果在促进人类文明、推动社会进步方面已显示出极大的作用,但并未得到人们的足够重视。诺贝尔经济学奖的设立,首次使经济学奖与物理学奖、化学奖、生物医学奖、文学奖以及和平奖并驾齐驱,每年颁发给在经济学的研究领域作出杰出贡献的人士。它的设立,对经济学在门类众多的学科中确立自己应有的地位具有极为重要的作用。

今天,诺贝尔经济学奖已被世人极为关注,尤其在经济学界更被奉为至尊。从 1969 年首次颁奖起,诺贝尔经济学奖至今已颁发了 31 届,共有 44 位经济学家获此殊荣。获奖经济学家的研究成果可谓集西方经济理论之大成,几乎囊括了二战后西方经济学的主要研究成就,对西方经济学的发展具有积极、重要的影响。

西方经济学研究了市场经济条件下经济发展的基本规律,对各国在市场经济发展过程中的经验和教训进行了科学的归纳和总结。作为人类经济思想的精华,其成果是全人类共同的宝贵财富。从这个意义上讲,其对中国建立健全市场经济体系,加速经济发展具有无可辩驳的借鉴作用。因此,我们应注意研究和学习西方经济学,并在批判吸收的基础上创立有中国特色的社会主义经济理论。这也是我们出版本丛书的初衷。

考虑到许多获奖者笔翰如流,著作等身,为使收入到丛书中的作品更具权威性,我们采用了由获奖者自己

选择作品的方式确定书目。对那些业已仙逝的获奖者，则邀请其家人、同事、学生或国内专家学者代为确定作品。尽管这样做使得我们的工作变得异常艰辛，但这却是本丛书的特点及价值所在。

在本丛书面世时，我们由衷地感谢那些为本丛书的出版提供过帮助的机构和人士，他们是：瑞典驻华大使馆文化处、美国驻华大使馆文化处及杨更琪先生、法国驻华大使馆文化处、英国驻华大使馆文化处、挪威驻华大使馆文化处、荷兰驻华大使馆文化处、爱立信（中国）有限公司业务开发及礼宾事务经理刘国来先生、瑞典皇家科学院经济科学委员会及托尔斯滕·珀森先生、北京大学图书馆沈正华女士等。没有他们卓有成效的工作，本丛书的顺利出版是不可想像的。我们还要感谢北京市新闻出版局及有关领导，他们对出版本丛书的支持为我们出好丛书提供了保证。我们更要感谢欣然允诺担任本丛书顾问及编委的学者们，他们的亲切指导，特别是为我们推荐能够胜任翻译工作的译者，对保证丛书质量起了关键作用。此外，我们还要感谢许许多多帮助过我们的朋友们。

我们希望本丛书能得到中国广大读者的承认，如果是那样，我们将深感欣慰。

出版者

2000 年 3 月

为《诺贝尔经济学奖获奖者学术精品自选集》所作的序言

1968年，瑞典银行(Sverigs Riksbank)在其300周年志庆活动时宣布设立一个新的奖项，即"纪念阿尔弗雷德·诺贝尔瑞典中央银行经济学奖"，并承诺对该奖项提供永久支持。

同时，瑞典皇家科学院承担了与自1901年起开始运作的诺贝尔奖完全相同的程序来对获奖者进行评选的任务。这样，每年年初科学院都会收到250～300个提名建议，通常涵盖多达百名以上的候选人(未经邀请主动提名的个人没有计算在内)。科学院奖项委员会(成员5～8名)首先对世界各地的候选人进行专业评估，然后，再以报告的形式将奖励意见提交给科学院社会科学部(The Social Science Class of the Academy)。最后，科学院的全体成员要在10月份齐集一堂，以决定奖项的最终归属。

本奖项的评选原则与诺贝尔奖完全一致，完全遵循

阿尔弗雷德·诺贝尔的遗愿——奖励在其所处领域有最为重大发现、发明或发展的科学家。在实践中，这就意味着要考虑到参选者学术成果的独创性、在理论与实践当中的重要性及其对科学工作的影响。科学院及奖项委员会也在一定程度上考虑到了候选对象及其学术成果对社会的影响，包括其对公共政策的影响。

在本奖项设立后的前30年里，科学院及奖项委员会对“经济科学”一词采取了相当广泛的理解。因此，奖励对象涉及经济学邻近学科的很多重大科学成就。有几个奖项实际上是授予了“跨学科研究”的成果，处于经济学、政治学、社会学及历史学等学科的交叉点。

本奖项设立后30年的运行也反映出本世纪下半叶经济学研究的特点与走向。首先，获奖情况清楚地表明美国在这一领域的优势地位。43名获奖者中，有28人是美国公民，尽管其中4人，即里昂惕夫(Leontief)、库普曼斯(Koopmans)、德布鲁(Debreu)和哈萨尼(Harsanyi)的出生地及受教育地均非美国。其他获奖者来自英国(6人)，瑞典、挪威(各2人)，法国、印度、荷兰、前苏联、德国(各1人)。获奖一人次以上的大学有：芝加哥大学(8人)、哈佛大学(4人)、剑桥大学(4人)、麻省理工学院(3人)、伯克利大学(2人)、奥斯陆大学(2人)、普林斯顿大学(2人)、斯坦福大学(2人)、耶鲁大学(2人)。

在获奖成果的内容方面，经济分析中的演绎法与数

学公式化表述成为其显著特征。例如，萨缪尔森(Samuelson)、希克斯(Hicks)、阿罗(Arrow)、库普曼斯、康托罗维奇(Kamtorovich)、德布鲁、阿莱斯(Allais)等人的获奖，还有金融经济学方面的获奖者马克威茨(Markowitz)、米勒(Miller)、夏普(Sharpe)、默顿(Merton)和斯科尔斯(Scholes)，以及博弈论研究方面的获奖者哈萨尼、纳什(Nash)、泽尔滕(Selten)等。

20世纪下半叶，经济学研究的趋势和特点之二是包括系统统计测试或评估等在内的定量研究法变得越来越重要。这主要反映在授予弗里希(Frisch)、丁伯根(Tinbergen)、里昂惕夫、克莱因(Klein)、斯通(Stone)、哈维尔莫(Haavelmo)等人的奖项上。实际上，在过去10年间，定量研究领域的硕果涉及了大量的数据，如果没有分析技术手段的发展(如计量经济学、投入—产出分析、程序编制、高能计算机等的发展和应用)，要想取得这样的成就几乎是不可能的。

本奖项还反映出二战后宏观经济学的重要作用。在此，我们应特别注意弗里德曼(Friedman)、克莱因、托宾(Tobin)、莫迪里安尼(Modigliani)、索洛(Solow)和卢卡斯(Lucas)等人的成就。一些研究经济体系的新方法得到了认同，这反映在奖项授予信息经济学[米尔利斯(Mirrlees)、威克里(Vickery)]、人力资源[贝克尔(Becker)]和博弈论等研究课题上。定量研究法在经济史学研究中的不断上升的重要作用表现在库兹涅茨

(Kuznets)和福格尔(Fogel)的获奖上。同样，发达国家和发展中国家经济中的制度的重要作用则体现在授予冯·哈耶克(Von Hayek)、布坎南(Buchanan)、科斯(Coase)和诺斯(North)等人的几个奖项上。对经济发展不同方面的研究成果的奖励则授予了缪尔达尔(Myrdal)、刘易斯(Lewis)、舒尔茨(Scholtz)和森(Sen)等人。

据我所知，此套丛书是首次尝试系统地出版所有获奖者的重要著作。丛书的出版本身就具有重大的意义，在中国面世其意义更加深远。我希望它的出版不仅有助于经济学的发展，而且能直接推动中国经济的发展。

奖项委员会秘书
托尔斯滕·珀森
1999年7月，于斯德哥尔摩

中文版序言

肯尼思·约瑟夫·阿罗
(Kenneth J. Arrow)

很高兴得知这两本关于社会选择的书翻译出版，这使它们在华语社会中更便于使用。我希望在那里，不论是知识阶层人员还是实务工作人员，都会有所反响。

社会选择理论面对的问题是协调不同的利害关系和有分歧的价值观念。一种经济体制，实际上任何社会体制也是如此，应该尽可能满足它的成员的需求。在我们所追求的民主世界里，我们希望全体成员的需求尽量平等地得到满足；而我们今天还未认清的是，无论在美国还是欧洲，无论是东方、还是西方，政策往往是由少数人或某个人制定的。然而，社会成员难以避免地会有不同的利益和不同的价值观。如果人们彼此是隔离孤立地按自己所希望的方式生活，这些差异就将不具有任何重要性。但实际上人是社会性的动物，必须在彼此合作中获利。经济的基础是劳动分工与相互贸易，这对合作各方都有很大的好处。类似地，政府必须着力于解决各种矛盾冲突，不然这些冲突可能会对每个人都造成伤害。因此，协调的行动是必

须的。尽管人们对采取什么行动有不一致的意见，但必须达成一致的协议。

社会的进化对于这种不同价值观、不同利益、重大社会行动同时出现的情况有很多解决的办法。一个适用于小社会的方法是直接谈判。另一些是通过选举或由市场来选择。市场选择是一种分力相互作用而达成一个合力的方式，例如，商品交换可以尽量满足每个人所选取的各个不相同的目标。市场是一种有效的，且能在可能范围内避免冲突的解，但它不能解决所有的问题。市场无法处理外在的事物，诸如环境迫使一个人的行为会影响其他人，又如它不能使财产所有权的初始分配适合市场有效运行的需要。市场需要完整的法律系统来保证合约生效、确定伤害的程度、防止暴力和欺诈，只有政府或某些相似的集体机构才能合乎要求。

在工商领域内，现代的工商企业达到相当的规模时，就会以公众股份的形式为众多股东所有。他们会有不同的利益，对未来有不同的预期，对企业应怎样运作自然就有不同的看法。事实上，我首先考虑的社会选择问题是想发展一种关于非个人所有制企业的理论，这就是我最先发现的由投票多数决定的无传递性。伟大的法国精英、自由的使者孔多塞（Condorect）在 1785 年就已看到了这一点，但是，那时无论是我还是任何其他关注这个问题的人都不可能做到的。我的贡献在于，证明了使用其他的投票或社会选择方法，只要不违背某些自然的条件，就会出现这种难以避免的无传递性。

社会选择的需求是必然的，正文中所论述的矛盾和悖论是无法避免的。这不仅对规范理论而言是问题，同样，它们也符合常见的实际现象。这些现象已经由一些学者用取自美国的数据进行了研究。我希望它们在中华人民共和国对政治和社会体

制的改革能有作用。

哈维·拉瑙特（Hervé Raynaud）和我在第二本书中指出：由许多不同准则来作选择十分相似于社会选择。如若一个企业家要对有风险的措施作出判断，又想避免与工作人员的麻烦，他会发现找出处置的方法是不容易的。这如同他们是社会中具有不同价值观的两个成员。在多准则的情况下，无论如何，各种经验法则导出的结论往往比社会选择所得到的更为可取。我希望这本书的结论对工商企业能有所帮助。

最后，我要感谢首都经济贸易大学出版社和它的领导周嘉硕先生，他建议将这两本书翻译合并为一以飨读者。



诺贝尔经济学奖获奖者学术精品自选集

首批书目：

● 社会科学中的数学和其他论文

[英] 理查德·斯通 著

● 经济理论与经济计量学

[美] 劳伦斯·克莱因 著
杰姆·马奎兹 编

● 社会选择：个性与多准则

[美] 肯尼思·约瑟夫·阿罗 著

● 中间道路经济学

[美] 保罗·萨缪尔森 著

● 策略理性模型

[德] 莱因哈德·泽尔滕 著

● 资产选择
——投资的有效分散化
(第二版)

[美] 哈里·马克威茨 著

封面设计：小　尘
责任编辑：钟　路

诺贝尔经济学奖获奖者学术精品自选集

目　录

社会选择与个人价值

社会抉择与多准则决策

第Ⅱ部分

献给我的妻子——塞尔玛



社会选择与个人价值

（第二版）

阿罗 著



第二版前言

现在关于社会选择理论的文献已经远远超过了本书第一版1951年发行时的寥寥几本。在这些新的文献中，有些是关于技术方面的，有些是关于数学方面的，更多的文献是关于社会选择的含义方面的。对于社会选择我也有了新的想法，对目前的表述方式我也远不满意。本版中附加的第八章“社会选择理论的注记——1963”提供了一个机会，对第一版的疏漏进行反思和整理，第八章包含了关于第一版的看法和第一版中的遗漏，以及对最新的文献的看法。由于第一版仍有它自身的价值，所以我采用增加一章的做法，这比对第一版的原文进行修改更合适。

肯尼思·约瑟夫·阿罗

1963年8月于日本东京



致　　谢

第　一　版

这项研究开始于1948年夏。当时我向考尔斯委员会(Cowles Commission)告假，去做兰德(RAND)公司的研究顾问，而当时兰德公司正在忙着美国空军的合约。1948年10月至1949年6月，这项研究作为考尔斯委员会的一般研究项目的一部分得到了洛克菲勒(Rockefeller)基金的赞助，因而有了进一步的发展，并形成了现在的结果。在此期间，我也得到了兰德公司的资助，这个资助来自于兰德公司和考尔斯委员会就资源配置研究的一份合约。我感谢这些机构对这项研究所表现的兴趣，以及他们给予我的方便。

我感谢以下兰德公司的成员：卡普兰(A. Kaplan，加州大学洛杉矶分校)，扬斯(J. W. T. Youngs，印第安纳大学)，他们对于如何阐述这个问题给予了指导，以及哈佛大学的布莱克威尔(D. Blackwell)和赫尔默(O. Helmer)，他们提供了其他有益的讨论。手稿已经由哥伦比亚大学的伯格森(A. Bergson)和哈特(A. Q. Hart)，以及库普曼斯(T. C. Koopmans)阅读过，当时库普曼斯在考尔斯委员会中从事经济研究，并在芝加哥大学任教。

我非常感谢他们的批评,使得表达方式更好,意义更明晰。关于数学结论在经济方面的含义得到了莫迪利亚尼(F. Modigliani)和舒尔茨(T. W. Schultz),以及西蒙(H. Simon)的批评意见的帮助。当时,莫迪利亚尼在考尔斯委员会工作,也在伊利诺伊大学任教;舒尔茨在芝加哥大学任教;西蒙在考尔斯委员会工作。关于效用的可度量性,我从马夏克(J. Marschak)的意见中得到了启发,这在第二章中进行了论述。当时,马夏克在考尔斯委员会工作并在芝加哥大学任教。在第七章中关于将决策过程本身作为一种价值这一节得益于比耶弗(P. J. Bjerve)和弗里德曼(M. Friedman)的建议。比耶弗在挪威奥斯陆的中心统计局(Central Statistical Bureau)工作,当时他是考尔斯委员会的客人;弗里德曼在芝加哥大学任教。我必须感谢芝加哥大学的伊斯顿(D. Easton)对我所不熟悉的政治哲学领域所给予的指导。数学表达式得到了安德森(T. W. Anderson)和纳格尔(E. Nagel)、麦金西(J. C. C. McKinsey)和杨斯的指点。当时,安德森在考尔斯委员会工作,并在哥伦比亚大学任教;纳格尔在哥伦比亚大学任教;麦金西在兰德公司工作。我还必须提及考尔斯委员会的几次会议所给予的激励,在会议中大家一起讨论和指正我的论文。无需多说,书中遗留的错误或者不清楚的地方都由我个人负责。

虽然在这里我不能对我的许多老师致以感谢,但我不能不提及霍太林(H. Hotelling),他现在在北卡罗来纳大学任教,是他使我对经济学产生了兴趣,特别是对社会福利问题的兴趣。

我还得感谢考尔斯委员会的编辑秘书简·诺维克(Jane Novick)太太,她为出版准备手稿,并详细检查手稿。感谢编辑助理琼·柯蒂斯(Jean Curtis)小姐,她帮助校对和编写了索引。

第 二 版

我感谢斯坦福社会科学中的数学研究所(Stanford Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences)的劳拉·斯塔格斯(Laura Staggers)小姐,她耐心帮我打印第八章的手稿。

肯尼思·约瑟夫·阿罗



1 导　　论

1.1 社会选择的类型

在资本主义民主下，社会选择基本上采取两种方法：一种是投票，通常用于作“政治”决策；一种是市场机制，通常用于作“经济”决策。在混合经济体系的民主形式中，如大不列颠、法国、斯堪的纳维亚，也同样采用这两种方法。只是他们在更大范围里采用投票，由它直接或间接地进行决策，而较少采用价格机制，即市场机制。但在世界其他地方，甚至在民主国家的较小社会团体中，社会决策有时采用另外两种方法：一种是独裁——社会决策由单个人或者小团体来作出；一种是传统——社会决策是由那些在任意特定的环境都能做出社会选择的、包罗万象的传统规则来确定，例如宗教法规（这在现代社会中越来越少了）①。

---

① 社会选择的后两种方法在某种意义上与民主截然相反。单个人统治是自由管理的一种极端情形，神圣法规统治则是法律统治的极端情形。但是，在动态机构中，神圣法规的统治会无意识地走向独裁。因为随着条件的改变，法规需要解释，不管这些法规当初在决定社会在不同环境中如何行动方面是多么明确，随着时光的流逝，它的意义将变得很含糊。可以想像，解释工作应通过民主程序由社会作为一个整体来进行。但也有可能，这种解释工作会落入某个人手中，而不是集体来掌握。在这种情形下，一旦有不同的意见，宗教法规就丧失了它作为社会行动指导的能力。新教徒在经济伦理领域的最终结论就是一例，它坚持每个人都有自己解释圣经的权利(R. H. Tawney, Religion and the Rise of Capitalism, London: J. Murray, 1926, 97～100)。但更多的情形是，由于神圣法规的权威性，解释的工作会由值得信任的某个人或某个小团体来进行。

这里关于社会选择的分类方法对应于 Knight 教授对习惯、权威以及一致意见的划分。不过在这里，我将一致意见分成投票和市场两类。(F. H. Knight, Human Nature and World Democracy, in Freedom and Reform, New York: Harper and Bros., 1947, 308～310)。

社会选择的后两种方法，即独裁和传统，它们在形式结构上具有投票和市场机制所没有的确定性。理论上的独裁体制中，只有一个人参与选择。理论上的传统统治的社会中，由神的意志（它或许可以假设成是与社会决策有关的所有人的共同愿望）来作选择。所以，在这两种情形中，不会出现个体意愿间的冲突[①]。但是，投票和市场机制这两种方法在作出社会选择时，都是综合了许多个人嗜好。当每个人在他的选择中都具有理性时，独裁和传统的方法也能够是理性的。但在涉及到每个个人愿望时，汇集选择的集体模式还能有一致性吗？

需要声明的是，本书中的研究仅涉及到上面问题的形式方面。即，在形式上能否构造一个由已知的个人嗜好集合到社会决策模式的过程，并且使得这一过程满足一定的自然条件。这个问题的必要性可以通过下面著名的“投票悖论”来解释。假设有一个由三个投票人组成的团体，该团体必须从三个备选的社会行为模式中作出选择（例如，裁军、冷战、热战）。假设这类选择必须重复进行，但有时也可能不是所有三个备选对象都用得上。这与欲望不变而价格－收入可变条件下，个人消费者的效用分析相类似，团体的理性行为是指：一旦团体按照集体的偏好对三个备选对象排序后，在给定的情形下，对那些可以得到的备选对象，

① 当然，可以假设，独裁者像一般的经济人一样，当他面对一堆备选对象时总能作出决策，而且对相同的备选对象每次作出的决策都是相同的。这种作出一致决策的能力是完整人格的一个特征。当我们考虑那些涉及到许多人的社会决策方法（投票或市场）时，如何实现这种一致决策的问题就类似于社会完整特征的存在问题。这种在精神上的类似是否有用留在以后观察。这里所研究的这种综合个人选择的方法形式上的存在性，必须要求社会具有上面所说的完整特征这个条件。但是，这些综合方法的存在性是充分条件，还是仅仅是充分条件的重要部分，仍不清楚。

必须选择排在最前面的。实现这种集体偏好模式的一个很自然的做法，就是少数服从多数。即如果团体中多数人认为第一个备选对象优于第二个，那么团体也就认为第一个备选对象优于第二个，也就是如果只有两个备选对象，那么团体将选择第一个备选对象。令 A，B，C 代表三个备选对象，1，2，3 代表三个投票人。假设个人 1 认为 A 优于 B，B 优于 C（因而 A 优于 C）；个人 2 认为 B 优于 C，C 优于 A（因而 B 优于 A）；个人 3 认为 C 优于 A，A 优于 B（因而 C 优于 B）。那么多数人认为 A 优于 B，而且多数人认为 B 优于 C。所以我们可以说团体认为 A 优于 B，B 优于 C。如果把团体行为看成是理性的，那么我们将不得不认为 A 优于 C。但是事实上团体中多数人认为 C 优于 A[①]。所以刚刚所描述的这种从个人偏好到集体偏好的方法，即少数服从多数的方法，不满足通常所理解的理性条件。我们能否找到其他的综合个人偏好的方法，使得它既在团体方面是理性的，又在其他方面也令人满意呢[②]？

如果我们沿用这种传统的理性观点达到某种最大化（下面很大的篇幅会讨论），那么从个人愿望中如何实现社会最大化的问题就是目前福利经济学的中心问题。这门学科的历史在此不

① 也许要附注一下，上面所说的决策方法在商讨中是必须的，对所有备选对象决策时，常会进行相继的两两比较。文中所描述的现象可以在国会对联邦资助教育的议案形式中看到，三个备选对象是：不予资助、仅对公立学校资助、对公立私立学校都资助。“投票悖论”似乎由 E. J. Nanson 首次提出（Transactions and Proceedings of the Royal Society of Victoria，Vol. 19，1882，197～240）。感谢 C. P. Wright（University of New Brunswick），他告诉我这个文献。

② 集体理性的问题 Knight 已经讨论过，但他主要是以社会心理学为前提。见 “The Planful Act：The Possibilities and Limitations of Collective Rationality，”in Freedom and Reform，见第 11 页注①中文献（下同），第335～369 页，特别是第346～365 页。

再详述[1]。一直存在的一个争论是:经济学家能否以经济学家的身份对一个社会状态是否优于另一个作出评论。假定我们承认个人间效用的比较是有意义的,那么就可以按照在每个社会状态下所有个人效用的和来对社会状态排序,这就是边沁(J. Bentham)的做法,并被埃奇渥思(Edgeworth)和马歇尔(Marshall)所接受[2]。即使在这种情形下,由个人效用得出社会效用的函数也有不同的数学形式可以选择。因此社会效用可能是个人效用的和,也可能是它们的乘积或者对数乘积,甚至也可以是它们的平方和。所以如伯格森(Bergson)教授所指出的,即使认为效用是可比的,价值判断仍然是不明确的[3]。如果我们不承认个人效用间的可比性,那情况将更加恶化。正是基于这个观点,罗宾斯

---

① 比较好的概述见 P. A. Samuelson, Foundations of Economic Analysis, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1947, Chapter VIII;以及 A. Bergson (Buck), A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics, Quarterly Journal of Economics, Vol. 52, February, 1938, 310~334。最近工作的总结在下面文章中可以看到:Socialist Economics, by A. Bergson, in A Survey of Contemporary Economics, H. S. Ellis, ed., Philadelphia: The Blakiston Co., 1948, Chapter XII。此外,还可见 O. Lange, The Foundations of Welfare Economics, Econometrica, Vol. 10, July~October, 1942, 215~228;以及 M. W. Reder, Studies in the Theory of Welfare Economics, New York: Columbia University Press, 1947, Chapters I~V。

② F. Y. Edgeworth, Mathematical Psychics, London: C. Kegan Paul and Co., 1881, 56~82,特别是第 57 页;The Pure Theory of Taxation, in Papers Relating to Political Economy, London: Macmillan and Co., 1925, Vol. II, 63~125,特别是第 100~122 页。在 Marshall 的消费者剩余学说中隐含了将社会效用看成是个人效用的和,尽管还涉及到其他假设(A. Marshall, Principles of Economics, New York: The Macmillan Co., eighth edition, 1949, 130~134, 467~476。)

③ Bergson, A Reformulation..., 也可以见 Samuelson, 219~252。均见第 14 页注①。

(Robbins)教授尖锐地指出：经济学家不能作出任何政策建议[①]，除非他们不再作为经济学家而是进入到伦理领域进行评论。另一方面，卡尔多(Kaldor)先生及随后的希克斯(Hicks)教授则认为，即使不去假设个人间效用是可比的，从经济学的观点上看，认为一个状态优于另一个状态也是有意义的[②]。他们提出了将两个不同的社会状态进行比较的一种特殊机制，即补偿原则，这将在第四章详细讨论。

这两个不同层次的论点间的争论有些混淆。毫无疑问，伯格森教授已经清楚指出，即使假设个人间效用具有可比性，基于个人效用作出社会选择的任何一种方法也都含有一种价值判断。但是在对综合个人愿望的模式给定基本价值判断后，经济学家仍需研究满足价值判断的那些社会选择机制，并且检验它们的结论是否违背其他的价值判断。特别是，他必须问，这些价值判断是否彼此一致，即是否存在一种能满足所有价值判断的社会选择机制？例如，在上面所讨论的投票悖论中，如果将少数服从多数的选择方法看成是一种价值判断，那么我们将得到这样的结论：这种价值判断在上面所提到的特殊情形中是自相矛盾的。

在讨论一致性时，个人间效用可比性的问题就变得相当重要。伯格森认为，根据个人的无差异图形可以对社会状态进行排

---

① L. Robbins, An Essay on the Nature and Significance of Economic Science, second edition, London: Macmillan and Co., 1935, Chapter VI; Interpersonal Comparisons of Utility: A Comment, Economics Journal, Vol. 43, December, 1938, 635～641。

② N. Kaldor, Welfare Propositions of Economics and Interpersonal Comparisons of Utility, Economic Journal, Vol. 49, September, 1939, 549～552; J. R. Hicks, The Foundations of Welfare Economics, Economic Journal, Vol. 49, December, 1939, 696～700, 711～712。

序,萨缪尔森(Samuelson)也同意这个观点[①]。另一方面,兰格(Lange)教授在他对社会福利函数的讨论中,假设个人效用是可度量的[②],而且在其他地方,他坚持认为效用的可度量性对规范的社会判断是绝对必须的[③]。勒纳(Lerner)教授最近在他的福利经济学的著作中,同样假设个人间效用的可比性是有意义的[④]。

下面对社会选择模式的各种价值判断间的一致性的讨论,对于投票和市场机制的区别将不再考虑,而是将它们都看成是广义集体性社会选择中的两种特殊情形。关于政治选择和经济选择间的相似性已被多次指出了。例如,扎森豪斯(Zassenhaus)教授把计划经济结构视为受特定社会产品分配方式影响的自由市场[⑤]。他认为,在类似于自由竞争的条件下,交换市场对商品的影响会以类似于一般市场的方式达到均衡,政治影响将替代产品的最初分配,即市场机制的分配,但他的模型仅在过于一般化的水平上进行了表述,从中很难看出在社会主义民主体制中会怎样运作。

鲍温(H. Bowen)博士将投票看成是对集体消费的要求[⑥]。

---

① 见 Bergson, The Fundamental Value Propositions of Individual Preference, A Reformulation. . . ,318~320;Samuelson,228,均见第 14 页注①。

② Lange,见第 14 页注①,第 219~224 页,特别是第 222 页的开头;但在第 223 页和第 224 页的开头有一些矛盾。

③ O. Lange, The Determinateness of the Utility Function, Review of Economic Studies, Vol. 1, June, 1934, 224~225。

④ A. P. Lerner, Economics of Control, New York: The Macmillan Co., 1944, Chapter III。

⑤ H. Zassenhaus, über die ökonomische Theorie der Planwirtschaft, Zeitschrift für Nationalökonomie, Vol. 5, 1934, 507~532。

⑥ H. R. Bowen, The Interpretation of Voting in the Allocation of Economic Resources, Quarterly Journal of Economics, Vol. 58, November, 1943, 27~48 脚注。

在他的文章中，他将收入和支出的分配视为是固定的，并作了其他一些简单的假设，他发现这种集体消费的需求曲线和一般的市场需求曲线非常相似。

奈特(Knight)也强调了在对有限备选对象作集体选择时，投票和市场机制非常相似[①]。他也强调了两者之间的区别，特别是投票比市场机制更趋向于不平等；但是这种区别很大程度上是属于社会心理学范畴的，而与这里讨论的问题无关。

最近，在布莱克(D. Black)教授发表的一系列文章中，他论述了在某些特定假设下，政治选择理论的不同方面，并阐述了在市场选择和选举选择之间的相似性[②]。关于他的工作将在7.2节中详细讨论。对于选举的技术问题也有一些解释。和这里最相关的是，从一个选区中推选的每一特定的方案都有某种任意性。从许多候选人中选出一个人来就任某一职位的问题，例如美国总统选举，或者在立法结构中每一选区只产生一个立法机构成员，明显与从许多备选社会政策中选出一个政策具有相同的特征；而事实上，在候选人中的选举是可以看成是实现政策选择的工具。

① F. H. Knight, Economic Theory and Nationalism, in The Ethics of Competition and Other Essays, New York: Happr and Bros., 1931, 294～305。

② D. Black, On the Rationale of Group Decision-Making, Journal of Political Economy, Vol. 56, February, 1948, 23～34; The Decisions of a Committee Using a Special Majority, Econometrica, Vol. 16, July, 1948, 245～261; The Elasticity of Committee Decisions with an Altering Size of Majority, 同上，第262～270页；Un approccio alla teoria delle decisioni di comitato, Giornale degli economisti e annali di economica, Vol. 7, Nuova Serie, 1948, 262～284。投票和市场的相似性，见 The Elasticity of Committee Decisions..., 262, 270；和 Un approccio..., 262～269。

1.2 本书研究的范围

前面已经说明了,本书的研究范围仅限于集体社会选择的形式方面。不属于讨论之列的内容通常属于博弈论范畴。要注意的是,博弈这一术语有双重含义。首先,决策过程将被视为一种博弈,在此不予考察。也不强调在经济行为和政治行为中,参与的重要性和赢得博弈的重要性[①]。毫无疑问,虽然在决定社会选择的机制中作此考虑是现实的,而且也应该这样考虑;但是这超出现在研究的范围。

其次,"博弈"的另一个意思是由冯·诺依曼(von Neumann)教授和摩根斯特恩(Morgenstern)教授引入到经济学中的[②]。广义上说,该观点在此的意义是,从个人偏好得出社会选择的机制一旦被建立,从理性的角度上看,他会发现用他的行为来不真实地表达其偏好是有利的。这可能是因为这种不真实在某种程度上会直接带来好处[③],而更常见的是由于带头不真实的人会使另一类人获利,那么另一类人将用某种方式来补偿带头的人,使得双方都比真实地表达他们的偏好要好。这就是在复数投票选举系统中,一个众所周知的做法,即一个实际上支持少数党候选人的个人会投票给他不太喜欢的多数党的候选人,

---

① Knight 强调了在人类活动中的参与心理;例如见第 17 页①中的文献。竞争心理重要性见 T. Veblen, The Theory of the Leisure Class, New York: The Macmillan Co., 1899。

② J. von Neumann and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, second edition, Princeton: Princeton University Press, 1947。

③ 类似的观点见 Bowen,见第 16 页注⑥,第 45,48 页。

而不是"弃权"。即使在能构造一个过程表明如何从个人偏好得出一致社会偏好模式的情形中，这仍然有一个问题，即当每个人都是理性的，怎样来设计博弈的规则，使得每个人都能实在地表达他们的真实偏好。它类似于在构造公平分配博弈时，博弈的规则一定要使每个理性参与者都能得到先就设计好的公平份额；在两个人平均分配的情形中，博弈就类似于其中一个参与者将整个商品分成两部分，然后让第二个参与者从中挑选他所喜欢的那一部分[①]。

除了不去考虑社会选择问题的博弈方面，我们还假设个人价值观是固定的，不会随决策的过程而改变。当然，这是经济学理论中的标准观点[尽管凡勃伦(Veblen)、克拉克(J. M. Clark)、奈特都坚持认为这个假设是不实在的[②]]，这也是古典自由主义的教条[③]。如果个人的价值观受到社会选择方法的影响，要弄清一种方法优于另一种方法意味着什么就更困难了。

最后，我们还要假设社会中每个人都是理性的。这个假设的确切含义在下一章中阐述。

---

① 见 H. Steinhaus The Problem of Fair Division (abstract), Econometrica, Vol. 16, January, 1948, 101～104。

② T. Veblen, The Theory of the Leisure Class, 见第 18 页注①; Why Is Economics Not an Evolutionary Science? in The Place of Science in Modern Civilisation and Other Essays, New York, B. W. Huebsch, 1919, 73～74; J. M. Clark, Economics and Modern Psychology, in Preface to Social Economics, New York, Farrar and Rinehart, 1936, 92～160; Realism and Relevance in the Theory of Demand, Journal of Political Economy, Vol. 54, August, 1946, 347～351; F. H. Knight, Ethics and the Economic Interpretation, in The Ethics of Competition and Other Essays, 见第 17 页注①, 第 19～40 页。

③ 古典自由主义认为，个人价值观是固定的，并且视社会问题为不同个人价值观之间的一种正常关系。F. H. Knight, Ethics and Economic Reform, in Freedom and Reform, 见第 17 页注①, 第 69 页。

2 偏好和选择的特性

2.1 效用的可度量性和个人之间的可比性

在这里，我们所采用的观点是个人间效用的比较没有意义。事实上，个人效用的可度量性与福利比较也不存在有意义的联系。这方面的争论是众所周知的，这里就不再引述。在整个争论中，效用可度量论的推崇者如果不采用无差异曲线的理论，那么根据他们的假设就不能解释任何经济行为的性质[①]。事实上，效用这个概念惟一的意义是描述真实行为的一个指标。如果一种行为可以用效用函数来解释，那么它完全可以用另外一些效用函数来解释，只要这些效用函数是原来效用函数的一个严格递

① 由此，经典需求理论使得家庭的无差异图形和个体成员的无差异图形之间的关系很含糊，与市场行为有关的是前者。从个人到家庭的无差异的过渡是从个人排序到社会排序的过渡的一种特殊情形；如果前面的观点被接受，家庭无差异图形只能源自于某种公共的价值标准的存在。但如前面已经看到，这些可以通过对个人无差异图形的考察来经验地决定，他们不是基于对某种类型感觉的灵敏度的内在比较。以后我将不考虑个人和家庭的无差异图形的区别；这种行为可以看成是家庭内部的综合以某种方式得到解决，或者这个问题就作为一般的问题加以考虑。

增的函数。如果我们认为效用是不可度量的，那么，也就谈不上效用的个人间的可比性了。

近来，由于冯·诺依曼教授和摩根斯特恩教授的结论，关于效用的可度量的课题再次兴起[①]。但他们的结论被极大地误解了。他们不仅是在一定的备选对象上考虑偏好模式，而且在备选对象的概率分布上考虑偏好模式。在对具有相关概率分布的偏好间的关系做出一些看似合理的假设后，发现存在一个效用值（它在线性变换下是惟一的），它具有以下性质：对备选对象上的任何概率分布的效用函数值就是效用的数学期望。换句话说，存在一种方法（在线性变换下是惟一的），对每一个概率分布都定义一个效用值，使得人类的行为可以看成是在寻求使他的期望效用达到最大。

就我看来，这个定理并没有使所发现的这种特殊的效用具有任何特别的伦理方面的意义。如果我们用效用的平方来代替冯·诺依曼和摩根斯特恩的发现，那么人类的行为也就变成寻求使其效用的平方根的数学期望达到最大。当然，这不是想否认冯·诺依曼和摩根斯特恩定理的用途。而是说，在对具有概率分布的备选对象的偏好定义效用值的许多不同的方法中，存在一种方法（更确切一点，是一个彼此间可以线性变换的方法的集合）可以用更方便的方式来阐述人类理性行为的规律。这种方法对于在具有随机事件的环境中，如何完善描述性经济理论以解释行为是非常有用的。但在考虑福利时，它没有什么用处。特别是在主要针对没有随机因素出现的政策进行社会选择时，它更

① 见第18页注②，第15～31，617～632页。也可以参见 W. S. Vickrey, Measuring Marginal Utility by Reactions to Risk, Econometrica, Vol. 13, October, 1945, 319～333。

没有什么用处了。换句话说,社会收入的分配应该由参与者的个人偏好来决定。

效用的度量经常和温度的度量相类比,而且这种比较也非常贴切。从专业角度上说,一个物体的温度就等于与之接触的一个单位质量的理想气体的体积(假定气体的质量与物体的质量相比非常小)。也许有人会问,为什么不用这种气体体积的对数或体积的立方根来代替呢?原因非常简单,用体积定义温度可以使一般的气体方程非常简单,除此之外没有任何更深的意义。认为温度从0℃升到1℃和温度从100℃升到101℃所增加的幅度相同又有什么意义呢?同样,在不同的福利水平上进行边际效用的比较也没有任何意义。

即使出于某种原因,我们承认每个人的效用是可度量的,那也还存在一个如何将个人效用汇总的问题。即使是最乐观的断言,认为每个人的效用函数在线性变换下是惟一的,我们仍需从反映每个人效用的无穷多个值中挑选一个,个人效用的汇总数值(比如说和)将依赖于每个人是如何选择他的效用值的。一般来说,似乎没有一种效用度量的方法能使所有选择相容[①]。这需要一种明确的价值判断,它不是由个人的满足感得到的,但它要

---

① 然而必须承认,如果假定以所有个人的偏好模式都一样为起点(即所有人的嗜好都是相同的),则可以对每个人选择同样的效用函数。但是,如果我们采用个人间效用可比这个思想,那就必须考虑到这种可能,具有同样的无差异图形的两个人中,一个人的敏感度是另一个人的两倍,因此前一个人的真正的效用函数应该也是后一个人的两倍。事实上,加上敏感度区分对实际应用会很有意思。

von Neumann and Morgensten(见第18页注②,第608~616页)已经考虑到两个人有不同的辨别力的情形,但他们没有用对于相同的商品束有不同的效用来表示这种情形。只是假设两个效用尺度只取离散的数值,而一个效用尺度会比另一个效用尺度可以取更多的数值。

求使不同人的效用在各方面都相容。除此之外，还需要一种价值判断，它能够按照特定的数学公式将个人效用汇聚。如果我们撇开数学方面，仅将效用作为一个人内心感受的尺度，那么将一个人的效用与另一个人的效用相加也就没有意义了。就是边沁在这一点上也有同样疑问[①]。

因此，在本书中我们用偏好类型来描述选择时的个人行为，不管是对于个人的行为还是个人间的行为，它都不具有任何数量的意义。

2.2 关于偏好和选择的符号

在本书的研究中，为方便起见，我们运用那些在经济学中不常用的符号来表示偏好。而这些符号在数学中特别是在符号逻辑中经常采用。我们假设选择者面对一个基本的备选对象集合。在消费者的选择理论中，一个备选对像就是一个商品束；在厂商理论中，一个备选对象就是关于投入与产出的一个完整决策；在福利经济学中，一个备选对象就是商品与劳动力需求的分配方案。一般来说，备选对象是一个向量。但在选举理论中，备选对象就是候选人。这些备选对象之间是互不相容的；分别用小写的英文字母 x，y，z，…表示。在任何给定场合中，选择者有一个所有可能备选对象集合的子集 S，他必须从集合 S 中选出一个备

① 谈论不同量之间的相加纯属空谈，因为加在一起的量与未加之前仍需区别，一个人的快乐绝不会是另一个人的快乐；一个人的所得，并非另一个人的所得；你可以假装将 20 个苹果和 20 个梨相加……（引自 W. C. Mitchell, Bentham's Felicific Calculus, in the Backward Art of Spending Money and Other Essays, New York: McGraw~Hill Book Co., 1937, 184.）。

选对象。这个集合 S 是熟知的机会曲线的一种推广。因此，在完全竞争的消费者选择理论中，S 是预算平面。我们进一步假定，选择是这样进行的：面对前面提到的集合 S，选择者对所有可能的备选对象两个两个轮流考虑，如 x 和 y，对任意两个这样的备选对象，选择者必须从下面三种决策中选出一种(而且只能选出一种)：x 优于 y，x 与 y 无差异，y 优于 x。对于不同的两个备选对象所作出的决策假定彼此是一致的，也就是说，例如，如果 x 优于 y 且 y 优于 z，那么 x 优于 z。类似地，如果 x 与 y 无差异且 y 与 z 无差异，那么 x 与 z 无差异。按照这种方式对所有备选对象排序后，选择者将面对这个特定的机会集合 S。第一种情形是：假若 S 中有一个备选对象优于 S 中其他所有的备选对象，那么选择者将会选择这个备选对象。第二种情形是：假若 S 中有这样一个子集，该子集中每一个备选对象都优于那些不在该子集中的备选对象，而且该子集中每个备选对象彼此间是无差异的。这种情形类似于最高的无差异曲线与一个给定的机会曲线相交，而且至少交于两点。在这种情形下，对于 S 作出最恰当的选择就是整个子集。其实前面讨论的第一种情形，就是这个子集只包含一个备选对象，因而选择也只有一个元素。

由于我们没有限制集合的类型，第三种情形就是集合 S 自身，即 S 中没有一个备选对象偏好或无差异于其他所有的备选对象。换句话说，S 中任何一个备选对象都有另一个备选对象优于它。例如，假定一个人认为钱越多越好，而 S 中备选对象是所有整数单位的美元的情况，或者，如果我们要求 S 是有界的集合。考虑备选对象为美元序列，$1/2, 2/3, 3/4, \cdots, 1-(1/n), \cdots$ 的情况。在这个集合中没有一个最大值，因而就没有任何理性的选择。但这种数学的观点与本书的研究没有关系。

偏好和无差异都是两个备选对象间的关系。当这两个关系

都成立时，我们用一个更方便的关系来表示，即“不次于”，它是指“偏好或者无差异”。“x 不次于 y”(即“x 优于 y 或者 x 与 y 无差异”)，记作 xRy。字母 R 就代表所有满足 xRy 的关系。由前面的讨论，对任意两个备选对象 x 和 y，我们有 x 优于 y，或者 y 优于 x，或者两者无差异。也就是说，我们假定任意两个备选对象都是可以比较的[①]。这个假设用符号表示就是：

公理 I 对任意备选对象 x 和 y，必有 xRy 或者 yRx。

满足公理 I 的关系 R 称为是连通的。注意，公理 I 对于 $x=y$ 或者 x 与 y 不相同都成立。因为我们常认为 x 与自己是无差异的，这就得出 xRx[②]。还有，公理 I 中的词“或者”，它包括 xRy 和 yRx 同时成立的可能。“或者”的意思是两个中至少一个发生；也包括两个都发生的情况。

上面所讨论过的不同的两个备选对象间偏好的一致性，可

---

① 所有备选对象的比较性假设是消费者选择理论中关于一体性争论的核心(见 V. Pareto, Manuel d'économie politique, deuxième édition, Paris, M. Giard, 1927, 546～569)。对不具有一体性的一些自相矛盾的结论(等价于非无穷小地接近的备选对象之间的不可比性)，见 N. Georgescu-Roegen, the Pure Theory of Consumer's Behavior, Quarterly Journal of Economics, Vol. 50, August, 1936, 545～569。Professor Ville 通过对需求函数的特性作一些看似合理的假设，得出了一体性条件，以及关于所有备选对象的可比性，见 J. Ville, Sur les conditions d'existence d'une ophélimité totale et d'un indice du niveau des prix, Annales de l'Université de Lyon, Section A, Vol. 3, No. 9, 1946, 32～39。

② 严格说，如果对于 $x\neq y$ 公理 I 成立，称关系 R 为连通的。如果对所有的 x 有 xRx，称关系 R 为自反的，见 A. Tarski, Introduction to Logic, New York, Oxford University Press, 1941, 93～94。这样，满足公理的关系既是连通的又是自反的。但为了方便起见，在本书中采用这一不很精确的术语，即我们用“连通”代替“连通且自反”。

以说得更精确一点，即：如果 x 不次于 y，而且 y 也不次于 z，那么 x 就不次于 z。用符号表示就是：

公理Ⅱ 对任意的备选对象 x,y,z，如果 xRy 且 yRz，那么有 xRz。

满足公理Ⅱ的关系称为传递的①。满足公理Ⅰ和公理Ⅱ的关系称为弱序，有时也简称为序。很明显，有了满足这两个性质的关系，就可以对不同的备选对象进行排序。“弱”的意思是指这种序关系不排除两者无差异，即公理Ⅰ和公理Ⅱ不排除下面这种可能性：对于不同的 x 和 y，可以既有 xRy 又有 yRx。而所谓强序就不可能有这种情形了②。弱序就是实数中“大于等于”概念的推广，强序就是实数中“大于”概念的推广③。

也许我们会感到这两个公理不能完全刻画偏好模式这个概念。例如，我们常常觉得不仅关系 R，而且严格偏好关系（优于）和无差异关系都应该是传递的。我们将证明，由关系 R 来定义偏好和无差异，将会得到通常希望偏好模式应具有的性质。

定义 1 如果 yRx 不成立，就称 xPy。

“xPy”就是指“x 优于 y”。

定义 2 如果 xRy 且 yRx，就称 xIy。

“xIy”就是指“x 与 y 无差异”。很明显，如此定义的 P 和 I 分别对应于通常的偏好和无差异概念。

---

① Tarski，见第 25 页注②，第 94 页。

② 事实上，“序关系”一般是指强序关系，见 Tarski，第 25 页注②，第 96～97 页。但是，在本书中“序”或“序关系”都是指弱序关系。

③ 强序关系的形式上的特点在后面给出，在讨论邓肯·布莱克教授的选举理论的近期工作时给出。见 7.2 节。

引理 1 (a)对任何 x,都有 xRx。

(b)如果 xPy,那么有 xRy。

(c)如果 xPy 且 yPz,那么有 xPz。

(d)如果 xIy 且 yIz,那么有 xIz。

(e)对任意的 x 和 y,有 xRy 或者 yPx。

(f)如果 xPy 且 yRz,那么有 xPz。

上面这些命题用符号来解释直观上是不证自明的。但为了说明公理Ⅰ和公理Ⅱ确实能推出关于备选对象的序关系的这些特性,也为了介绍后面所采用的推理方法,我们还是给出简要的证明。

证明

(a)在公理Ⅰ中,令 $y=x$,那么,对任意 x,有 xRx 或者 xRx,也就是说,xRx。

(b)直接由定义 1 和公理Ⅰ可得。

(c)根据(b),由 xPy 得 xRy。假设 zRx。那么根据公理Ⅱ,由 zRx 和 xRy,有 zRy。但是,由定义 1,yPz 意味着 zRy 不成立。因此假设 zRx 导致矛盾,所以,我们认为 zRx 不成立,由定义 1,有 xPz。

(d)根据定义 2,由 xIy 和 yIz,得出 xRy 且 yRz。根据公理Ⅱ,有 xRz。同样,根据定义 2,由 xIy 和 yIz,得出 zRy 和 yRx。根据公理Ⅱ,那么 zRx。因为既有 xRz,又有 zRx,所以由定义 2,有 xIz。

(e)直接由定义 1 可得。

(f)假设 zRx。由 yRz 和 zRx、根据公理Ⅱ,可得 yRx。但是,由定义 1,xPy 意味着 yRx 不成立、因此,假设 zRx 产生矛盾所以,zRx 不成立,即有 xPz。 证毕

为了清晰起见，当指关系 R 时，不使用术语“偏好类型”或“偏好模式”，以避免与 P 所表示的严格偏好相混淆。我们将 R 称作是“序关系”或者是“弱序关系”。“偏好关系”专指关系 P。

根据关系 R，现在我们可以定义选择这个概念。前面说过，一般我们认为从一个给定的备选对象集合中作出的选择本身也是一个集合。如果 S 代表所有可能备选对象的集合，我们称它为环境[①]，令 $C(S)$ 是从 S 中选择出来的备选对象的集合。显然，$C(S)$ 是 S 的一个子集。$C(S)$ 中的每个元素都优于 S 中不属于 $C(S)$ 的元素，而且 $C(S)$ 中所有元素都是无差异的；所以，如果 x 属于 $C(S)$，那么对 S 中任何备选对象 y，都有 xRy。另一方面，如果 S 中有一个元素 x，使得对 S 中任意元素 y 都有 xRy，那么根据定义 1，S 中就不存在元素 z，使得 zPx。因此，我们可以正式将 $C(S)$ 定义如下：

定义 3 $C(S)$ 是由 S 中那些满足下面条件的备选对象 x 组成的一个集合，即对 S 中任一元素 y 都有 xRy。

注意，$C(S)$ 是赋予某个可能的环境 S 一个选择的一种函数关系。因而我们称它为选择函数。事实上，它是完全竞争下消费者选择理论中需求函数的一种推广，这里的 S 就是预算平面。

令 $[x,y]$ 表示由两个备选对象 x 和 y 组成的集合。若 xPy，由引理 1(b)，有 xRy，再由引理 1(a)，有 xRx，所以 x 属于 $C([x,y])$；另一方面，若 xPy，由定义 1，即 yRx 不成立，所以 y 不属于 $C([x,y])$。因此，如果 xPy，那么 $C([x,y])$ 只包含一个元素 x。

---

① 这个术语是采用 J. Marschak 的术语。

反过来，假设 $C([x,y])$ 中只包含一个元素 x。因为 y 不属于 $C([x,y])$，所以 yRx 不成立；由定义 1，有 xPy。

引理 2 xPy 的充要条件是：x 是 $C([x,y])$ 中的惟一的元素。

当 xPy 不成立且 yPx 也不成立时，显然有 xIy，这等价于说两个元素 x 和 y 都属于 $C([x,y])$。如果是这样，我们就知道选择函数 $C([x,y])$ 为双元素集合，我们已完全定义了关系 P 和 I，因而也就定义了关系 R。但是，由定义 3，有了关系 R 也就可以确定所有备选对象集合的选择函数 $C(S)$。因此，对理性选择的假设的结果之一就是：任何环境下的选择都可以通过双元素环境中的选择来确定[①]。

较之用无差异图形或者效用函数表示选择机制，用上面所提到的序关系来表示选择机制，更有利于当前的分析。就无差异图形而言，首先，序关系的一个优点就是它可以考虑备选对象这个向量的分量超过两个的情形。其次，无差异图形的用途很大程度上依赖于这样的假设，即选择者对备选对象的一个分量比另一个分量更关心，而且其他的分量要保持不变，有了这个假设才

---

① 在正文中，我们先定义一个满足一些公理的弱序关系 R，然后由关系 R 得出选择函数。事实上，也可以直接定义一个满足一些公理的选择函数，然后说明存在一个能得出同样的选择函数的弱序关系，这个方法并不困难。而且这两种方法在逻辑上是等价的。这后一种由选择函数开始的方法类似于 Cournot 的方法。Cournot 从满足某些要求性质的需求函数开始，取代那些由无差异图形或效用函数所得到的性质（A. Cournot，Mathematical Principles of the Theory of Wealth，English translation，New York，The Macmillan Co.，1897，49～50）。Cournot 关于需求函数的假设并不很强。由这一观点出发对需求更复杂的研究可参见前面注中谈及的 Ville 和 Samuelson，111～117。两者的方法都只考虑了完全竞争条件下消费者选择情形，但推广到非完全竞争环境中并非不可能。

可以绘制无差异图形[①]。但是，由于现在所研究的是关于社会状态的选择，所以每个备选对象有许多分量在特定环境下是有利的，而在另外的环境下则不是。第三，无差异图形还必须有连续性的假设，这对目前的研究而言是不必要的。特别是，这一不可分问题已在福利经济学中造成了很多争议，因此有必要假设社会状态的某些分量是离散变量。

至于效用函数，首先是形式上的困难。如果对序关系没有足够的连续性假设，就不可能对每个不同的备选变量定义一个实数，使得它满足效用函数的一般要求。其次，在一般情形下，我们只是用 $U(x) \geqslant U(y)$ 代替 xRy，而所有证明的过程都不改变，那么，整个解释的完整性其实被这个引进的多余函数 $U(x)$ 所破坏，$U(x)$ 因为所有的性质完全依赖于序关系的性质。如果我们只关心序关系的性质，那最好的方法还是直接用序关系来表示[②]。

2.3 社会状态的排序

本书中，选择的对象是社会状态。社会状态的一个精确定义由下面诸因素来完整描述：每个人所拥有的各种商品的数量，每

---

① 当假设存在一个饱和点时，这个简短的说明不太准确。但是至少在几个大区间中每一段的图表是相同的，一些有趣的经济问题可以看成是在书中所提及的假设成立的范围中发生的。

② 类似地，在生产经济学的领域中，将变换限制到投入—产出向量落在某个点集中，与引入变换函数然后将厂商的运作限制到条件 $T=0$，两者相比，前者更自然。在前者的情形中，显然不需用函数表示，因为如果 $F(t)=0$ 的充要条件是 $t=0$，那么 $F(T)$ 就可以像 T 一样作为变换函数。

个人所提供的劳动的数量，投入到每一种生产性活动中的各种生产资源的数量，以及各种集体活动的数量，如市政设施、外交及外交延续，以及为名人塑像等。假定每个人按照他对社会状态的满意程度，对所有想像得到的社会状态有一个明确的排序。在这里，我们认为个人可以根据他认为有关的任何标准对所有社会状态排序，而不去假设个人对不同社会状态的态度仅仅由他在各个社会状态下拥有的商品束的多少来决定。例如，凡勃伦有闲阶层的一个成员可能只按照每个社会状态中他的有关收入这一标准对社会状态排序。而一个信奉社会人人平等的个人可能会按照收入平等的程度对社会状态排序。而事实上，如同上面所提到的，由于社会状态是一个向量，它的某些分量是集体行为，用纯粹的个人主义假设来分析诸如国民收入在公共和个人消费间的划分等问题是无用的。在这一方面，我们现在所采用的方式就具有很完美的一般性。当然，这种一般性不是没有代价的。如果我们事先对社会状态的个人排序的特性有所了解，并以此来限制一般性，那将会给分析带去更多的信息。这个问题后面会再次说明。

一般来说，按照个人的直接消费对社会状态排序，与按照个人消费加上他对财产的通常标准（或许他以金钱至上为标准）对社会状态排序，这两个排序之间是有区别的[1]。我们把前一种排序看成是反映了他的嗜好，而后一种排序是反映了他的价值观。关于这两者的区别没有方法能分得清清楚楚。一个具有审美能力的人肯定会从他邻居修剪完好的草坪中获得快乐。在自由市场的体系中，这种感觉对社会选择没有直接的作用；但从心理的角度看，这种感觉和从自己草坪中得到快乐的感觉稍稍有点不

① 这个区别是由 M. Friedman，The University of Chicago 向作者强调的。

同。当然，从直观来说，我们会觉得并不是所有可能的个人偏好都应该加以考虑；那些与他毫不相干的事情上的偏好应该不予考虑。我并不反对这个观点，但我想强调的是，确定哪些偏好是相关的，哪些是无关的，这本身就是一种价值判断，不可能事先决定。从形式的角度看，个人对污染他土地的工厂废烟持有的厌恶程度与他对存在于中部非洲的野蛮行为的极端厌恶的程度，是难以区分的。在我们的国家中，大多数人认为前者与社会政策有关，而后者与社会政策无关；但也有一部分人的判断正好相反，认为前者与社会政策无关，而后者与社会政策有关。这里，我们只想说明，在寻求社会福利的真正一般性理论时，我们应该关注价值观的整个体系，其中包括关于价值的价值观。

正是这种根据价值观进行的排序，将个人的所有愿望都考虑进去了，其中包括最重要的社会化愿望。而如何实现社会最优化主要与这种社会化愿望有关。但是在市场机制中，我们只考虑按照个人嗜好作出的排序。就消费而言，两者的区别类似于庇古(Pigou)教授提到的生产的社会成本与个人成本的区别[①]。

至于符号，我们用 R_i 表示个人 i 关于备选社会状态的序关系。有时，当对同一个人需要考虑他的几个不同的序关系时，会在符号上加上上标来区别。对应于序关系 R_i，(严格)偏好关系记为 P_i，无差异关系记为 I_i。如果序关系上有上标(如 R_i'，R_i'')，那么相应的偏好关系和无差异关系也要加上。

同样，作为一个整体，暂定社会状态也有一个排序关系，记

① A. C. Pigou, The Economics of Welfare, London, Macmillan and Co. , 1920, Part II, Chapter VI. 类似地可见 Samuelson，见第 13 页注②，第 224 页；Reder 见第 14 页注①，第 64～67 页；G. Tintner, A Note on Welfare Economics, Econometrica, Vol. 14, January, 1946, 69～78.

为 R，有时也相应的加上上标。相应的社会偏好和社会无差异分别记为 P 和 I；如果 R 加上上标，它们也同样加上上标。

本书中，我们假定个人都是理性的，即序关系 R_i 满足公理 Ⅰ 和公理 Ⅱ 。现在的问题就是对于社会作为一个整体的序关系是否也能反映出是一种理性的决策，即 R 也满足公理 Ⅰ 和公理 Ⅱ 。

2.4 关于理性和选择的题外话

本书中所采用的理性概念是现代经济分析的中心。不可否认它有很强的直观性；但进一步分析就会发现很多困难。这些困难可以从博弈论的近期发展中看到，特别是在二人零和博弈中[①]。

在本章 2.2 节中说明的理性假设的一个结论是，从任何备选对象的集合中作出的选择都可以由两个备选对象间的选择来决定。但是假若有这样的情形，选择者从来都不面对两个备选对

① 尽管在 von Neumann and Morgenstern，Chapters V—XII 中，数学方面已有了长足的发展，但关于多于两个人的博弈论或者多个局中人的支付总和不独立于博弈方法的博弈论仍有疑问。例如，在这样的博弈中，理性行为理论所必需的补偿机制与现实世界中不相似。如 Bain 教授在一些有关的文章（J. S. Bain，Output Quotas in Imperfect Cartels，Quarterly Journal of Economics，Vol. 62，August，1948，617～622）所指出。另一方面，二人零和博弈中理性博弈理论的完全解决还有点疑问，但至少在某些约束下，例如关于风险中性的局中人和对博弈规则有完备信息的情形已经完全解决（见 J. von Neumann，Zur Theorie der Gesellschaftsspiele，Mathematische Annalen，Vol. 100，August，1928，295～320；von Neumann and Morgenstern，见第 18 页注②，Chapters III—IV）。因此，二人零和博弈中行为理论对理性这个概念的检验很大程度上类似于完全竞争下厂商的静态理论。

象进行选择；也就是说，他所面对的环境中有许多备选对象。事实上，这正是在完全竞争下消费者选择理论的情形，实际所面对的环境是整条直线或整个平面。但在某些特定的真实条件下，从实际环境中作出的选择可以看成是对两个备选对象间的选择中得到的，至少从概念上讲，想像一下由两个备选对象间作出的选择也有意义。

从表面上看，在二人零和博弈中，理性行为理论似乎也属于同样一种类型。我们假设每个局中人轮换考虑他的所有可能策略，按照在每一个策略下他所期望的最小收益（或最大损失）对策略进行排序，然后选择其中使得他的最小收益达到最大的策略作为他的最优策略。但是，我们将这个解看成是真正理性的惟一理由是：如果两个局中人按照这种做法，那么即使有一个人发现对手的策略，他也不会有改变其策略的动机。这是最小最大化定理或鞍点定理的实质。这个定理的正确性基于我们每次对局中人环境赋予的是一个纯策略集合，但我们还必须面对混合策略环境，即上述纯策略的所有概率分布。因此，如果环境（即所有允许的策略的集合）包含不只一个策略时，也就自动生成了一个无限数。即使从概念上讲，我们也无法想像在两个策略间作出的选择；这是由于，如果这个限制是真实的，只有在一些特殊的情形中才存在鞍点，而且，通过最小收益对策略排序不可能得到具有上述稳定性的解。

因此，建立在两两比较上的理性选择模型，似乎不能与所述博弈情形中的理性行为符合。最本质的一点是，如果从概念上我们假设选择是在两个备选对象间进行的，我们就不能排除将这两个选择间的任何概率分布也作为一种备选对象。这个观点是被广泛接受的。对理性模式的精确刻画将后面这一点也考虑了进去，其方式是考察这种一般选择理论的新模式的后果会是什

么,或者考虑还无法预见的特定社会选择理论;但应该注意到,至少有这样的可能,即上面所讨论的悖论或许可以通过更广义的理性概念解决。

许多作者也已经感到,从对所有可能的备选对象的一维排序这个角度看,理性假设对于经济学的理论化是绝对必须的,例如,罗思柴尔德(Rothschild)教授指出:"除非各经济单位都按照某种理性模式来行事,否则就不可能从一些假设中得出一般性的理论"[①]。这个观点在逻辑上似乎没有必然性;如果事实要求如此,我们就只能在关于选择函数结构的其他假设上建立我们的经济理论[②]。尽管还没有形成系统性,但制度学派的工作可以看做是在做这样的尝试。

不是根据序关系来建立的选择函数理论似乎与罗思柴尔德教授的"真正的非理性"相一致。如同前面讨论的博弈论,这样的选择函数不一定是一时冲动的产物,它也可能源于充分的思索。

---

① K. W. Rothschild, The Meaning of Rationality: A Note on Professor Lange's Article, Review of Economic Studies, Vol. 14, No. 1, 1946~1947, 50。罗思柴尔德将这个观点归功于 Lange 教授。但这似乎有点误解。Lange 将理性的假设(他认为与排序一致)看成是一种相当方便的假设。即使是真的,也不是必须的(O. Lange, The Scope and Method of Economics, 同上, Vol. 13, No. 1, 1945~1946, 30)。

② 类似于 Lange,我将经济学看成是发现现实中某一部分的一致性的尝试,而不是将经济学看成是从一些假设所得到的逻辑上的结论,而不管这些假设是否与现实有关系.简化理论的建立对经验分析是绝对必须的;但这只是工具,而不是目的。

3 社会福利函数

3.1 社会选择问题的形式描述

在本书中，我将重述伯格森教授在描述福利判断问题的形式时采用的术语[①]。他的社会福利函数的不同的自变量就是在这里定义的社会状态的分量。所以从本质上说，他是在描述将社会状态量化为社会效用的过程。而社会的目的可以认为是，在相关的技术或资源的限制下，寻求使社会效用或社会福利达到最大。换句话说，即在一定的环境中选择一个能产生最高社会福利的社会状态。在用最大化来描述行为时，不需假定社会福利是可度量的；有关的事情是满足公理Ⅰ和公理Ⅱ的社会序关系的存在性。前面说过，要定义这样的序关系必须知道任意两个备选对象间的相对排序。

一般而言，给定的两个备选社会状态的相对排序会随着某些个人价值观的改变而改变；如果假定这种排序不会随着个人价值观的改变而改变，就等于用柏拉图式的传统社会哲学的方

① 见第14页注①，Bergson，A Reformulation...。

法去假定存在着一个独立于个人愿望的客观社会的“善”。这个社会的“善”可以很好地通过哲学研究的方法来解释。这样的哲学观确实能够、也曾经为世俗的或宗教的精英统治起到了辩护作用，但是下面我们将会看到这两者的联系并不是必然的。

对于近代唯名论者而言，在柏拉图王国中存在这种社会理想的假设是没有意义的。边沁及其追随者的功利主义哲学试图将社会利益建立在个人利益的基础上。与功利主义哲学相关的享乐主义哲学则进一步指出，每个人的利益与他的愿望是相一致的。因此，从某种意义上说，社会利益就是个人愿望的综合体。这种观点是采用政治民主和自由放任经济的依据，或者至少是关于消费者自由选择商品和劳动者自由选择职业的经济体制的理论依据。

享乐主义心理学可以由以下假设表达其思想：个人行为可以由他的个人序关系 R_i 来表示。功利主义哲学则可以说成是，对任意两个社会状态的选择依赖于所有个人序关系，即依赖于 $R_1,\cdots,R_n$，其中 n 是团体中个人的数目。换句话说，整个社会的序关系 R 是由个人对社会状态的序关系 $R_1,\cdots,R_n$ 决定的。这里我们不排除这种可能性，即社会对两个社会状态间的某些选择或全部选择与一些特殊的个人无关，就如同多变量的函数可能和其中某些变量无关。

定义 4 社会福利函数是指这样一个过程或规则，对各社会状态的每一个个人序关系集合 $R_1,\cdots,R_n$（一个人一个排序），就有一个相应的备选社会状态的社会序关系 R。

这里，我们记对应于个人序关系集合 $R_1,\cdots,R_n$ 的社会序关系为 R，这种对应关系由给定的社会福利函数给出；如果个人序关系上加上上标，那么相应的社会序关系也加上上标。

这里所用的社会福利函数的概念和伯格森的社会福利函数概念有所不同。在这里,作为社会福利函数自变量的个人序关系是指个人的价值观,而不是他们的嗜好。伯格森认为在按照个人的嗜好来决定生产资源的分配和最终产品与闲暇的分配时,个人的价值观将会产生一种社会价值判断来作为上述分配的特定规则。实际上,这里所描述的社会福利函数是一个用来确定伯格森的哪些社会福利函数可用的方法。当然也必须承认有这种可能性,即真正实现的社会选择可能与伯格森所描述的特殊的价值判断不一致。但从形式来说,这两种社会福利函数定义的区别不是很重要。在伯格森的方法中,个人的嗜好(针对他自己的消费)可以用效用函数表示,即主要由序关系表示。因此,伯格森的社会福利函数也是从社会状态中每一个个人序关系集合到社会序关系的一种规则。此外,如前面所指出的,在嗜好和价值观之间没有一个明确的区分。

社会福利函数的一种特殊的类型就是它对任意个人排序集合都赋予同一个社会序关系。当然,这种情形也就是说,社会选择将完全独立于个人嗜好,这又回到了柏拉图式的情形。

如果我们希望在指定一个社会福利函数之前,不必对个人嗜好有任何先验知识,那么我们的社会福利函数必须对任何逻辑上可能出现的个人排序集合都有定义。这样的社会福利函数是通用的,它能够应用于任何团体中。这个理想似乎是边沁的社会伦理学以及由它派生的福利经济学所向往的。

然而,我们不必自问能否定义这种通用的社会福利函数。称能根据社会福利函数定义得出相应社会排序的个人序关系集合为容许集,则相应的社会排序满足公理 I 和公理 I 。一个通用的社会福利函数就是指,任意个人排序集合都是容许集。但是,我们或许会觉得某些类型的个人排序集合不应是容许集。例如,在

福利经济学中，常假设一个人对不同社会状态的衡量是完全按照他在此社会状态下的消费量。如果真是这样，我们可以只要求社会福利函数对上述类型的个人排序集合有定义，只有这样的个人排序集合才是容许的。

但我们还是要假定我们对个人排序的先验知识是不完整的，这是指所有备选对象中至少存在三个备选对象，事先完全无法预测任一给定个体对这三个备选对象的排序情况。也就是说，对于这三个备选对象的集合 S，在逻辑上可能出现的任何个人排序集合都是容许集的子集。说得更形式点，即：

条件 1 在所有备选对象中，一定存在一个由三个备选对象组成的集合 S，满足下面条件：对 S 中的备选对象的任意一个个人排序集合 $T_1,\cdots,T_n$，都存在一个对所有备选对象的个人排序的容许集 $R_1,\cdots,R_n$，使得对每个人 i，以及 S 中任意 x、y，有 xR_iy 的充分必要条件是 xT_iy。

需要强调的是，条件 1 是对社会福利函数的形式作限制，因为根据个人排序的容许集的定义，我们要求对于一个相当广的范围内的个人排序集合，都能根据社会福利函数给出一个真正的社会排序。

我们还希望在社会福利函数上加上其他一些明显合理的条件。

3.2 社会价值观和个人价值观的正向联系

由于我们试图描述的是社会福利而不是某种邪恶，我们应

当假设社会福利函数必须满足这一条件:对于个人价值观的改变,相应的社会排序必须作正向反应,至少不是反向的。因此,如果一个备选社会状态在每个人的排序中的位置有所提高或保持不变,而其他社会状态的位置都不改变,那么我们希望在社会排序中该备选对象的位置至少不会下降。

这个条件可以重新表述如下:假设在开始时,个人价值观由个人排序集合 $R_1,\cdots,R_n$ 给出,R 是相应的社会排序,P 是根据定义由 R 得到的相应的社会偏好关系,x 和 y 是两个给定的备选对象,且 xPy。下面我们假设价值观按下面方法改变,即每个人将排序中 x 的位置提到比原来位置更高,而其他备选对象的相对位置保持不变。如果我们把这个新的个人排序集合(表明新的价值观集合)记为 $R_1',\cdots,R_n'$,相应的社会排序为 R',对应于 R' 的偏好关系为 P',那么我们当然希望 $xP'y$。这是一个很自然的要求,因为没有人将 x 的位置排得比以前低。如果先前认为 x 排在 y 前面,我们当然希望现在也是如此。

我们仍然要将这个条件正式表达:x 在每一个人排序中不下降,而其他备选对象的相对位置保持不变。条件的后一部分可以这样描述:对不含有 x 的备选对象,他们新的关系 R_i' 可以从原来的关系 R_i 中得到,并且保持不变。用符号表示如下:对任意 $x'\neq x$ 和 $y'\neq x$,有 $x'R_i'y'$ 的充要条件是 $x'R_iy'$。而条件 x 在 R_i' 中的位置不低于 x 在 R_i 中的位置是指,对于任意的备选对象,如果在原来的关系 R_i 中 x 优于它们,那么在新的关系 R_i' 中,x 同样优于它们;而那些在原来的关系 R_i 中与 x 无差异的备选对象,在新的关系 R_i' 中 x 优于它们或与它们无差异。这加在一起等于是指下面两个条件:(1)在原来的关系中,x 优于的那些备选对象,在新的关系中,x 同样优于它们;(2)在老的关系中,x 优于或无差异的备选对象,在新的关系中,x 仍然优于或无差异

于它们。用符号表示如下：对任意的 y'，若 xR_iy'，则 xR'_iy'；以及若 xP_iy'，则 xP'_iy'。现在我们将社会福利函数所必须满足的第二个条件表示如下：

条件 2 令 $R_1,\cdots,R_n$ 和 $R'_1,\cdots,R'_n$ 是个人排序关系的两个集合，R 和 R' 是相应的社会排序关系，P 和 P' 是相应的社会偏好关系。假设对个人 i 两个排序关系有下面的联系：(1)对任意两个不同于备选对象 x 的备选对象 x' 和 y'，有 $x'R'_iy'$ 的充要条件是 $x'R_iy'$；(2)对任意 y'，若 xR_iy'，则 xR'_iy'；对任意 y'，若 xP_iy'，则 xP'_iy'。则有，如果 xPy，那么 $xP'y$。

3.3 对无关备选对象的独立性

如果我们将由社会排序 R 得到的选择函数 $C(S)$ 看成是社会作为一个整体，面对备选对象集合 S 所作的真实选择，那么每个人从任何给定的环境 S 中作出的选择应该和不在 S 中的任何备选对象无关。例如，假设有这样一个选举机制：每个人按照他的偏好对所有候选人列出一张表(按由好到差排列)，通过一个事先指定的程序，从这些表格中得到获选者。(事实上所有的选举过程都是这种类型，尽管在多数情形下并不是全部的表格都需要。)假设现在进行一次选举，该地区有几个指定的候选人，每个人根据他的偏好列出他的表。而这时其中一个候选人突然去世了。那么从每个人的偏好表格中划去这名候选人，在余下的候选人中按照原来的步骤作出社会选择。也就是说，个人在活着的候选人集合 S 中作出的选择应该与个人对不在 S 中的候

选人的偏好无关。另一种解释就是，选举的结果依赖于这名候选人去世的日期在投票日之前还是之后这一偶然事件。因此，我们可以要求我们的社会福利函数满足下面条件，社会从给定的环境中作出的选择仅与对该环境中的备选对象的个人排序有关。换句话说，如果我们考察两个个人排序集合，其中每个人在给定环境中对特定备选对象的排序在两个集合中都是相同的，则我们要求，在该给定环境下，由两个排序集表现出的个人价值观决定的社会选择是相同的。

条件 3 令 $R_1,\cdots,R_n$ 和 $R_1',\cdots,R_n'$ 是个人排序的两个集合，$C(S)$和 $C'(S)$是相应的社会选择函数。对任何人 i 以及给定的环境 S 中的任意元素 x 和 y，如果 xR_iy 的充分必要条件是 $xR_i'y$，那么 $C(S)$和 $C'(S)$相同（即对无关备选对象的独立性）。

这个条件的合理性可以通过考虑那些不满足条件 3 的选择方法所得到的结果看出，即在俱乐部中常用的分级排序方法[1]。假设现在存在有限个候选人，让每个人对这些候选人进行排序，即按照第一候选人、第二候选人等进行排序。事先我们给第一候选人第二候选人等定义一个权数，越排在前面的权数越高，那么加权和最高的候选人当选。例如，假设有三个投票人，四个候选人 x,y,z,w。令第一、第二、第三、第四选择的权数分别是 4，3，2，1。假设个人 1 和个人 2 的排列顺序是 x,y,z,w。而个人 3 的顺序是 z,w,x,y。在这样的选举机制下，x 当选。那么，如果将 y 从候选人中排除，将同样的方法应用到余下的候选人中，因为在每个人的排序中 y 都次于 x，结果应该一样；但是，如果真的将 y

[1] 这个例子得到与 G. E. Forsythe，(National Bureau of Standards)讨论的建议。

排除，将会得到 x 和 z 的加权和是相同的，因此 x 和 z 都当选，这不满足条件 3。

在比赛中主要按照个人成绩对整个参赛队伍进行排序也会存在类似的问题。例如，每个大学派几位选手参加竞走比赛，在每个运动员名次的基础上对各个大学进行排序。亨廷顿(E. V. Huntington)教授曾研究过这个问题[①]，他通过一个例子说明，对运动队打分的通常方法(类似于分级投票)与一个类似于条件 3 的条件不一致，对该条件亨廷顿称之为关联性假设。

从对无关备选对象的独立性这个条件中可以看到，一般来说，社会选择的所有方法都是投票这一类型。如果 S 是由两个备选对象 x 和 y 组成的集合$[x,y]$，条件 3 告诉我们，在 x 和 y 间的选择完全由社会中成员对 x 和 y 的偏好来决定。也就是说，如果我们知道社会中哪些成员认为 x 优于 y，哪些认为 x 和 y 无差异，哪些认为 y 优于 x，那么我们就会知道社会将作出的选择。在前面我们知道，依次在两个备选对象间作出的社会选择随之决定了整个社会排序，由此就得到了关于所有可能环境的社会选择函数 $C(S)$。条件 2 保证了这一点：投某个备选对象的票将会使该备选对象被选中的把握更大。

实际上，条件 1 说的是：如果环境改变而个人的排序保持不变时，所作出的不同选择彼此间具有某种一致性。而条件 2 和条件 3 说的是：假设在一个固定的环境中，个人价值观有某些特别类型的改变，所作出的不同选择也应该具有某种一致性。

① E. V. Huntington, A Paradox in the Scoring of Competing Teams, Science, Vol. 88, September 23, 1938, 287～288。我在此感谢 J. Marschak 提供这个文献。

3.4 公民主权的条件

我们当然希望假定,在我们的社会中,每个人都能按照自己的价值观对可能备选对象自由地进行选择。也就是说,我们不希望我们的社会福利函数由于它的定义,妨碍我们表达对某个备选对象比另一个备选对象更偏好的愿望。

定义5 如果在两个不同的备选对象 x 和 y 中,对任意的个人排序集合 $R_1,\cdots,R_n$,都有 xRy,其中 R 是对应于 $R_1,\cdots,R_n$ 的社会排序,则称社会福利函数是强加的(imposed)。

换句话说,当社会福利函数是强加时,一定存在两个备选对象 x 和 y,不管所有人的嗜好如何(即使所有人都认为 y 优于 x),社会都不可能认为 y 优于 x;即某些偏好是禁止的。(注意:根据定义1,对于所有个人排序集合都有 xRy,等于说 yPx 不成立。)

本书一开始,曾间接提到按照传统法则来决策的一种社会选择类型。定义5是否是接近传统选择的直观思想仍有争议。在受传统约束的社会选择的真实情形中,虽然人们并没觉得这种约束像定义5所说的一样,但是这些约束确实是个人嗜好的一部分。这里涉及到一个心理敏感程度的问题;但在一个给定的情形下,我们能否说出与集体习惯相冲突的社会成员的真实愿望呢?

如果上述问题的答案是肯定的,那么定义5实际上就是对传统这个概念的正确的形式描述。事实上由于有关这个问题的研究离题太远,所以非常幸运,我们并不需要一个明确的答案。

可以肯定的是，我们希望加在我们的社会福利函数上的条件不应是定义 5 那种；如果所有人的愿望不一致，那么我们当然希望任何一种选择都是可能的。即使定义 5 不是传统选择的模型，它至少也是像殖民地占领国那样的外部控制的模型。

条件 4 社会福利函数是非强加的。

条件 4 比目前所要求的更强。在某两个备选对象间的选择可以假定是强加的，我们真正要求的是存在一个由三个备选对象组成的集合 S，S 中任意两个备选对象间的选择不会事先受到社会福利函数的限制。这个集合 S 也必须具有条件 1 所说的性质。

如果对前面问题的答案是：说出个人与宗教法则间相冲突的愿望是不明智的，那么我们就会遇到这种局面——事先知道个人对社会备选对象的排序必定符合一定的限制，即由个人作出的某些选择是事先指定的。在这种情形下，我们可以想到社会福利函数只需对那些与已知的社会伦理规范相符合的个人排序集合有定义；这个要求将削弱条件 1。这一点将在第 7 章进一步讨论。

还需要注意的是，条件 4 排除了本章 3.1 节中所讨论的柏拉图情形。条件 4 完全表达了这种想法，即所有的社会选择都是由个人愿望来决定的。条件 2（条件 2 保证了这种选择直接和个人愿望相一致）、条件 4 表达的思想和伯格森对个人偏好的基本价值命题相同。基本价值命题说的是，对于两个备选对象，除一个人外其他所有人都认为是无差异的，那么社会对这两个备选对象的态度就取决于这个人的态度，即如果他认为两者中一个备选对象优于另一个或者两者无差异，那么社会也同样认为一

个优于另一个或者两者无差异[1]。条件 2 和条件 4 加在一起就相当于通常的消费者主权的概念,由于这里我们指的是价值观而不是个人嗜好,因此我们也可以称这两个条件表达了公民主权的思想。

3.5 非独裁的条件

不具有集体特性的社会选择的第二种形式是独裁。在形式上,纯粹的独裁意味着社会选择完全由一个人的偏好来决定。也就是说,一旦独裁者认为 x 优于 y,那么社会也一定会认为 x 优于 y。

定义 6 如果存在个人 i,使得对任何 x 和 y,除了 i 以外不管其他所有人的任何排序 $R_1,\cdots,R_n$,只要 xP_iy 就有 xPy。其中 P 是对应于 $R_1,\cdots,R_n$ 的社会偏好关系,则社会福利函数称为独裁的。

由于我们感兴趣的是社会选择的集体方法,所以我们当然希望排除这种独裁的社会福利函数。

条件 5 社会福利函数不是独裁的(即社会福利函数是非独裁的)。

同样,也不能说定义 6 是真正独裁的真实模型。在社会所有

---

① Bergson, A Reformulation..., 见第 14 页注①, 第 318~320 页。严格来说,个人偏好的基本价值命题不能由条件 2 和条件 4(连同条件 1 和条件 3)推出,尽管和它们相似的可以推出一些,见 5.3 节结论 3。比这里的条件 2 稍强的形式就能推出想要的结论。

成员中或至少大多数成员中都存在某种意见一致的因素。这一点说得更具体点，即在这些人的愿望中包括一种让独裁者来作出社会决策的倾向①，或者至少说对某些特殊的社会决策他们希望由独裁者来决策。对于一部分人对独裁的喜好将在第7章进一步讨论。但是，无论什么情形，将条件5加在社会福利函数上肯定是合理的。

现在，我们在社会福利函数的结构上加上了五条合理的条件。当然，这些条件都属于价值判断，对这些条件也会招致一些疑问。但总的来说，这些条件用一种非常一般的形式表达了公民可以有相当广泛的价值观的公民主权和理性这一学说。现在的问题就是如何从对所有可以想像的备选社会状态的任意个人排序集合都能构造一个社会选择，而且这种构造的方法必须符合条件1～5所表达的公民主权和理性的价值判断。

3.6 效用和

现在考虑有着悠久历史的一种福利函数——边沁—埃奇渥思(Bentham-Edgeworth)的个人效用和。由于在2.1节中我们已经拒绝了将效用量化的想法，尤其是拒绝个人间效用的比较，现在所采用的方法也就排除了这种福利函数形式。但是，假定效用和仅仅依赖于个人排序而不是效用指标，它还是可以重新形成的。伯格森关于社会福利函数的讨论中似乎已隐含了此意②；

① 见 E. Fromm, Escape from Freedom, New York, Rinehart and Co., 1941, 305。

② Bergson, A Reformulation..., 见第14页注①，第324,327～328页。

尽管他提出了许多令人信服的反对效用和的论点,但他没有发现这与个人偏好的基本价值命题(见本章3.4节)相矛盾;而如果他没有考虑用个人排序来决定效用和的形式的话,他就会发现这个矛盾。就我看来,只依赖于无差异图形对效用求和的惟一方法是:由于对应于个人排序有无数的效用指标,因此可以建立一个对每一个无差异图形都能定义一个效用值的规则;然后根据这个规则所选出的特殊的效用值的和就是个人排序的函数值,再用它来对社会排序。

显然,对给定的情形,由于所选出的规则不同,按效用和会导致不同的决策。对任何规则,条件1可以满足。但条件2和条件3主要说的是,在给定的环境中,随着个人排序的某些改变,社会选择也会按某种方式改变。也就是说,为了使效用和满足条件2和条件3,必须对上面的规则作严格的限制。而事实上,在第5章一般可能性定理的证明中指出,如果要求规则能使效用和满足条件2和条件3(如果有)的话,它将违背条件4或条件5。事实上,按照6.3节的定理3,即使假设每个人的效用完全由他的消费量决定,也同样如此。我无法构造一个本质上有异于一般可能性定理的关于效用和的特别的证明方法。

但是,考虑对个人排序赋予效用值的特殊规则还是有意义的①。假设个人排序在备选对象上的概率分布满足冯·诺伊曼和摩根斯特恩公理②,那么存在一种给每个备选对象定义一个效用值的方法,它在线性变换下是惟一的,而且可以根据效用的数学期望值对备选对象上的概率分布进行排序。假设对每个人来说,有一个最优的备选对象,它优于或无差异于其他所有的备

① 这个特殊的规则是A. Kaplan建议的。

② 见第20页注①。

选对象；还有一个最差的备选对象，使得其他的每一个备选对象都优于或无差异于它。那么对于任意个体而言，效用值可惟一地由前述方法定义。即它惟一取决于线性变换。对最优的备选对象定义效用值为1，最差的备选对象定义效用值为0。这种定义可以使得个人效用具有可比性。

不难看出，上面这种定义效用值的方法并不能令人满意。假设现在有三个备选对象和三个人。设其中两个人定义备选对象 x 的效用值为1，y 为0.9，z 为0；另一个人定义 y 为1，x 为0.5，z 为0。按照上面规则，y 优于 x。由于每个人都认为 z 是最差的，很明显 z 是最不受欢迎的。如果我们将 z 排除在外，最终结果应该不会改变；但是，按照上面定义效用值的方法，前面两个人就会定义 x 的效用值为1，y 为0，而第三个人定义 x 为0，y 为1，由此根据效用和的排序方法就会有 x 优于 y。

对上面的观点作简单的修改就会发现，所提到的规则并不能使效用和这种社会福利函数与条件3一致。假设将个人排序作如下改变，前面两个人认为 z 和 x 无差异，第三个人认为 z 和 y 无差异，而三个人关于 x 和 y 的相对排序都不改变。那么对 x 和 y 定义效用值与将 z 排除在外时的效用是完全相同的，所以对 x 与 y 的选择就换了次序，这与条件3相矛盾。

上面这些结论明显依赖于如何选择效用值的单位。尽管在其他情形中这种矛盾不那么明显，但是这种依赖性仍然不是真的。一般来说，对两个特殊的备选对象定义给定的效用值(如0和1)是一种随意性的行为，而这种随意性最终导致了所得到的社会福利函数不满足上面所列出的某一条件。

4 补偿原则

4.1 补偿的支付

为了更清楚地显示构造社会福利函数的困难，我们换一种方式，用补偿原则来考虑。补偿原则这个概念是用来定义由个人排序到形成社会选择的两种不同的但有关联的方法[①]。其中一种权威性的说法是，如果存在一种支付补偿的方法，当社会状态从 y 变到状态 x 时，按原则在状态 x 中作出补偿，使每个人都认为这个状态优于状态 y（或者是每个人都认为它与状态 y 无差异，而且至少有一人认为它优于状态 y）。于是，如果作出了补偿，社会就应该认为 x 优于 y。

除了在那些完全忽略人民需要的哲学中，这一论述当然是无可非议的。事实上，这只是用一种迂回的方法来说明一个简单的事情。在补偿支付之前，相关的不是状态 x，而是从状态 y 变到状态 x 然后作出补偿的状态。真正优于状态 y 的是后者，我们仍用 x 来表示。用前面的符号，如果对每个人 i 都有 xR_iy，而

---

① 见 Reder，同第 14 页注①，Chapter 1，特别是第 14，17 页。

且至少有一个人 i 认为 xP_iy，那么社会就认为 xPy，其中 P 是对应于个人排序集合 $R_1,\cdots,R_n$ 的社会偏好关系。如果我们加上这个性质：对任何人 i 有 xI_iy，则 xIy；于是我们就有了简化的伯格森教授对个人偏好的基本价值命题[①]。

下面我们定义一种关系 xQy：

(1)如果对任何个人 i 都有 xR_iy，就称 xQy。

前面曾经假设，对任意 i，R_i 是一种弱序关系，因而它满足公理 Ⅰ 和公理 Ⅱ 。根据引理 1(a)，有

(2)对任何 i，xR_ix。

根据公理 Ⅱ，有

(3)如果对任何 i，xR_iy 且 yR_iz，那么 xR_iz。

由(2)和(1)，显然有

(4)对任何 x，都有 xQx。

假设我们有 xQy 和 yQz。那么由(1)对每个 i，有 xR_iy 和 yR_iz，所以由(3)，对每个 i，xR_iz。于是由(1)有 xQz。所以

(5)对任意 x,y,z，如果 xQy 而且 yQz，那么 xQz。

为方便起见，我们对满足性质(4)和性质(5)的关系作一个定义。

定义 7 称 Q 是半序，如果它满足

(a)对任何 x，有 xQx；

(b)对任何 x,y,z，如果 xQy 且 yQz，那么 xQz[②]。

注意，在这个定义下，某些备选对象间在给定半序关系中是

---

① 见第 46 页注①。

② G. Birkhoff, Lattice Theory, New York, American Mathematical Society, 1940, 7。

可比较的,而另一些备选对象间也许是不可以比较的,即在这种情形中 xQy 不成立,yQx 也不成立。

于是,我们说由(1)所定义的这种特别的关系 Q 是备选对象空间的一个半序。对这个特殊关系 Q,假设个人排序集合 $R_1,\ldots,R_n$ 满足 xQy,那么在这个假设下肯定有 xRy,但是不能肯定有 xPy。例如,对任何 i,若 xI_iy,我们也有 xQy。

假设对于由(1)定义的关系 Q,个人排序集合满足:xQy 且 yQx 不成立。由(1),这意味着对任何人 i 有 xR_iy,而且至少对一个人 i,yR_ix 不成立,根据引理 1(e),这意味着至少有一个人 i,有 xP_iy。这就是刚开始所讨论的补偿原则形式上的假设。在这种情形下,我们有理由要求 xPy。总的来说,关系 Q 和社会排序 R 之间的关系是,如果 xQy,那么 xRy;如果 xQy,而且 yQx 不成立,那么 xRy,且 yRx 不成立。对此我们介绍下面这个更一般的定义。

定义 8 R 称为是与 Q 相容的,如果

(a)R 是一种弱序;

(b)Q 是一种半序;

(c)对任意的 x 和 y,如果 xQy,那么 xRy;

(d)对任意的 x 和 y,如果 xQy,且 yQx 不成立,那么 yRx 不成立。

由(1)所定义的半序 Q 是一致性半序。当然,它依赖于特定的个人排序集合。本节中所讨论的"补偿原则"可以重述如下:对任意的个人排序集合,相应的社会排序与一致性半序相容。在第 3 章注(第 46 页注①)中已经看到,这个原则不能从条件1~5中推出,但如果将条件 2 作一些修改就可以得到这个原则。

如果 x 和 y 都在环境 S 中,xQy 且 yQx 不成立,那么 xPy。

所以由定义 3 可知，y 不在 $C(S)$ 中。因此，如果我们能在 S 中找出这样的备选对象 y，即在 S 中存在一个备选对象 x 使得 xQy 而 yQx 不成立，我们就可以在决定 $C(S)$ 时将这样的 y 排除在外；或者，如果我们能找到这样的备选对象 x，在 S 中不存在另一个备选对象 y，使得 yQx 而 xQy 不成立，我们就可以知道这样的 x 必属于 $C(S)$。具有这种性质的备选对象 x 称为是最优的①。这就提出这样一个问题：如何得到这样的最优备选对象。

在关于 S 的特性和个人排序的特性的一些特定的假设下，研究上面的问题其实就是所谓的新福利经济学的主要内容②。所得的结论应只与最不容置疑的价值判断有关，这一想法激励了沿这个思路的研究。尽管对最优备选对象的研究可能是分析社会福利函数的有效准备，但还是很难发现政策性建议是如何

① V. Pareto 首先用这种形式对这个问题进行了描述(同第 25 页注①，354～365，617～657)。E. Barone 给出了详细细节(The Ministry of Production in the Collectivist State，in Collectivist Economic Planning，F. A. von Hayek，ed.，London，Routledge and Sons，1935，245～290)。此后，A. P. Lerner 作了进一步的发展(The Concept of Monopoly and the Measurement of Monopoly Power，Review of Economic Studies，Vol. 1，June，1933，162～165；也可以见他的前面著作 Economics of Control.)。H. Hotelling 给出了严格的描述(The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and Railway Rates，Econometrica，Vol. 6，July，1938，248～256)，O. Lange 对整个学科作了系统性的详细说明(The Foundations of Welfare Economics，同第 14 页注①，215～218)。如果每个人以价格为参数理性而自私地行事，则可以运用微积分最大化的方法或者图解等价的方法得到这样的结论，于是最优的备选对象就是那些可以实现的社会状态。在这些环境中微积分的用途涉及到每个人所消费的每种商品的数量的假设。S. Kuznets 在稍有不同的情形中指出了这个假设的作用(On the Valuation of Social Income-Reflections on Professor Hicks' Article，Economica，Vol. 15，New Sieries，February，1948，2～6)。没有附加假设的定理是有效的；但通常的微积分的方法就不适用了。

② 见本页注①，第 249～252 页。

以研究最优备选对象为基础的。我们无法确定哪一个备选对象是最优的；况且，即使我们知道目前的社会状态不是最优的，其他有几个备选社会状态优于它，也无法知道应该改变为哪一个备选社会状态，因而社会就会发现自己与比里当（Buridan）的驴子处于同样位置。作为社会选择的基础，萨缪尔森教授已经指出新福利经济学的不足*，所以这里就不必再去讨论了。

但是，我们沿着萨缪尔森的工作进一步研究下去，就会怀疑最优备选对象的研究对直接与消费者（劳动者）的选择有关的社会选择的研究是否真的有用。这个领域中近来接受的学说是：在社会的最优点，两个商品的边际替代率对所有消费者而言是相同的。这个结论是通过假设每个消费者完全按照他在每个社会状态下的所拥有的商品数量对社会状态排序得到的。但在第6章中我们证明了，如果按照上面所述的个人主义方式对社会状态作个人排序，那就不可能形成一个符合条件1～5的社会福利函数。因为根据收入分配来评价所处的状态，不同的人之间的冲突将会更尖锐。也就是说，当最优社会状态不能作为一个完全量化的社会排序的前提时，现在这种关于最优社会状态的分析就是很适合的。这个观点在6.3节中是必须的条件。

当然，关于最优社会状态的研究可以不以个人嗜好的个人主义假设为基础。但很明显，在决定最优社会状态之前，首先必须对那些能够形成令人满意的社会福利函数的个人排序的假设加以研究。

在对生产方面最优条件的研究中，这个观点就不成立了。其原因是，这些条件牵涉到资源，而除了资源在其不同用途中有可

* maximal 通常都译成极大或最优，这只是指它在一个不可代替的位置，并不是量或值的最大、最好。——译者注

变生产率这一间接原因外，其配置方式对于社会各成员而言，是无差异的[①]。就是这个假设才将生产的最优条件和交换的最优条件真正区别开来。

4.2 补偿的可能性

补偿原则的另一个含义首先由卡尔多(Kalder)先生提出[②]：在两个备选对象 x 和 y 之间选择，如果在状态 x 下有这样一种补偿的方法，使得每个人在状态 x 下通过补偿都比在状态 y 下好(或者说每个人都和在状态 y 下一样好，而且至少有一个人比状态 y 下好)。于是，即使事实上补偿并没有支付，社会也将选择 x。从深层的伦理角度上看，无法断言上面的规则所表明的选择模型(称为卡尔多补偿原则)一定是最优的。这是因为，事实上它无法排除在 x 下收入的分配可能会更不平等。但是卡尔多认为，至少从总的生产量这个角度看，我们可以说 x 优于 y，而关于分配的问题另当别论。

卡尔多补偿原则受到希克斯(Hicks)教授的高度赞赏，但也受到鲍谟尔(Baumol)先生的批评[③]。后者的批评是两方面的：

---

① Bergson, A Reformulation. . . , 见第 14 页注①, 第 316～317 页。

② 见第 15 页注②。

③ Hicks, 见第 15 页注②, 第 698～701, 711～712 页; W. J. Baumol, Community Indifference, Review of Economic Studies, Vol. 14, No. 1, 1946～1947, 44～48。Hotelling 教授(见第 53 页注①, 第 267 页)也指出，该原则的应用等价于卡尔多原则，只是限制更多。从上下文中看，他所设想的情况是社会一开始就是在如上一节所定义的(所有的价格都等于边际成本)最优状态中，而且是在采取可分的投资和不采取可分的投资间进行选择，而显然不存在这种情形。在这种情形中，卡尔多原则仅仅是为了确保在面临条件变化时经济仍处于最优状态。

(1)原则中隐含了效用的个人间可比性。这是由于在计算这种可能性补偿(但不是真实的补偿)时是根据货币量来度量的,因此,富人手里每个单位货币的社会价值和穷人手里的社会价值在计算时是相同的。(2)即使在这种情形下,每个人在 x 下确实比在 y 下要好,这也只是在某种伦理学的功利体系下才是有效的。正如前面已经看到的,在涉及到某种价值判断时,后面这一点无疑在形式上是对的。但是,我们现在所讨论的价值判断具有很强的一般性。如果意识到"较好些"不仅是个人自己消费的函数,也是其他因素以及社会结构的函数时更是如此,正像鲍谟尔自己在脚注观察到的。

第一种反对意见似乎有点模糊。的确,当实际收入的边际效用是一个常数而且每个人都一样时,运用卡尔多原则与运用效用和规则所得到的结论是相同的。但这并不是说卡尔多原则假设了效用的个人间可比性。相反地,卡尔多原则等于是:按照能使收入的边际效用具有某些指定的性质这一规则,来对不同的个人无差异图形选择相应的效用值,见3.6节。当然,它意味着从选择哪些规则来确定效用值方面,补偿原则有一定的任意性。例如,我们一般是去寻找在状态 x 下每个人需要多少补偿(可以是正的也可以是负的)能够使他认为和在 y 下一样好;如果所有人的补偿的总和是正的,那么就可以说社会认为在 x 下好于在 y 下。替代做法,就是去寻找在 x 下每个人需要的收入差额(可正或可负)使得他和在 y 下一样好;如果这些差额的总和是正的,就可以说社会认为在 x 下优于在 y 下[①]。这后一规则和贝努利(Bernoulli)假设有关,贝努利假设收入的边际效用与收入成反比,而卡尔多原则中假设收入的边际效用是常数。所以鲍谟

① 这个规则是 F. Modigliani 建议的。

尔的反对意见实际上是针对卡尔多原则中的这种任意性。

然而，尽管卡尔多补偿原则是那些具有同样“合理性”的无限多个原则中的一种，但仍然必须问，这些原则是否是至少不会由于某些原因而被明确抛弃的社会行为准则。首先考虑卡尔多和希克斯所定目标的合理性，即将社会状态变化中的生产方面与分配方面区别开来的合理性。任何给定的选择都以两个方面的考虑为基础。即使根据生产对社会状态排序具有很明确的意义，但与那些依据所有相关因素（包括类似于生产因素的分配因素）进行的社会状态排序相比，它一点用处也没有。

在不止一种商品的世界中，更进一步的反对意见是：运用某种使不同商品可以相比的价值标准，来比较任意两个社会状态中的总产量，这种比较其实是模棱两可的；而且通常像这样的价值标准必须依赖于收入的分配。换句话说，忽略分配来谈论总产出是没有意义的。在只有单个商品的世界中，即只有一种消费品，没有劳动力，这种模棱两可就消失了。卡尔多原则说的就是使一种商品的总产出达到最大[①]。但在一般情况下，就会出现这样的问题：如果状态 y 被抛弃，取而代之的是按照卡尔多原则指导的状态 x，那么用于定义总产出的价值标准会与前面的不同，所以正如鲍谟尔所说，我们得到了“一根可以随意弯曲、伸长并最终变成碎片的测量竿”[②]。

这种论点正好适合于我们的形式框架。根据定义 4，卡尔多原则形成了一种社会福利函数。定义关系 xCy，它是指“x 可以

---

① 单个商品的假设已经在某些关于最优化条件的讨论中解释了，见 K. Wicksell, Lectures on Political Economy, London, G. Routledge and Sons, 1935, Vol. I, 140; F. H. Knight, Fallacies in the Interpretation of Social Cost, in The Ethics of Competition and Other Essays，见第 17 页注①，第 219 页。

② 见第 55 页注③，第 46 页。

通过补偿支付的方法由 y 得到"。对于一个给定的个人排序集合，令 R 是相应的社会排序，P 是相应的社会（严格）偏好关系（见定义 1），Q 是上一节所介绍的一致半序。那么卡尔多原则就是说：如果存在一个备选对象 x'，使得 $x'Cx$，$x'Qy$，而且 yQx' 不成立，那么 xPy。立即可以清楚地看到：卡尔多原则违背条件 3，这是因为如果我们不可能既有 xQy，又有 yQx 不成立，那么在 x 和 y 间的选择必须依赖于不在 $[x,y]$ 的备选对象与 y 之间的关系 Q，所以它必须依赖于个人对不在 $[x,y]$ 中的备选对象的排序。

但是，我们可以用下面方法重新表述卡尔多原则，使它不违背条件 3，而且我相信这样的叙述正是卡尔多和希克斯的意思。前面所介绍的关系 C 有下面的性质：

(1)对任意 x，有 xCx；

(2)对任意 x 和 y，如果 xCy，那么 yCx；

(3)对任意 x,y,z，如果 xCy 而且 yCz，那么 xCz。

这些性质的意义显而易见：由于 x 可以通过对每个人支付 0 补偿由本身得到，所以第一个性质成立。如果 x 可以通过对个人 i 支付补偿 c_i（可正可负）从 y 得到，那么 y 就可以通过对个人 i 支付 $-c_i$ 从 x 得到，所以第二个性质成立。如果 x 可以通过对个人 i 支付补偿 c_i 从 y 得到，而 y 又可以通过对个人 i 支付 c_i' 从 z 得到，那么 x 就可以通过对个人 i 支付 c_i+c_i' 从 z 得到，所以第三个性质成立。

具有性质(1)～(3)的关系 C 通常称为等价性或等价关系[①]。无差异关系就是这种关系的一个例子。众所周知，无差异关系或其他等价关系都可以用来将整个空间划分成互不相容的

① Tarski，见第 25 页注②，第 94～96 页。

子集，使得在每一个子集中的任何两个元素都具有指定的关系，而且属于不同子集的两个元素之间就不具备这种关系。例如，无差异关系将整个商品束空间划分成具有上面性质的无差异曲线。同样，关系 C 也可以将所有可能的社会状态划分成互不相容的子集，使得在同一个子集中的 x 和 y 有 xCy，而在不同子集中的 x 和 y，xCy 不成立且 yCx 也不成立[①]。这些子集称为补偿等价类。卡尔多—希克斯方法的实质是，将同一补偿等价类的两个元素看成是处于同一个生产水平；在这两个元素之间的选择涉及到分配的伦理标准的问题。据此，我们可以设定一个关于分配的初步价值判断，然后从每个补偿等价类中选出一个容许的

---

① 这个命题不难证明。它要求将所有社会状态分成具有下面性质的子集：(a)每个社会状态至少属于一个子集；(b)如果 x 和 y 在同一个子集中，则 xCy；(c)如果两个子集不相同，那么它们完全不相交，即，要么它们完全相同，要么它们没有任何公共元素；(d)如果 x 和 y 在不同的子集中，那么 xCy 不成立，而且 yCx 也不成立。

我们可以构造出这样的子集(或者如上面所称的等价类)：对任意一个给定的备选对象 x，所有满足 $x'Cx$ 的备选对象 x' 组成的子集是由 x 生成的等价类。所有备选对象生成的等价类就是具有上面性质的子集。

证明

(a)由(1)，每一个备选对象 x 是在由 x 所生成的等价类中。

(b)令 x 和 y 是在由 z 生成的等价类中的两个元素，那么根据定义，xCz 且 yCz。由(2)yCz 可以得到 zCy；由 xCz 和 zCy，根据(3)就得到了 xCy。

(c)令 C_1 和 C_2 是两个等价类，而且有一个共同的元素 z。令 C_1 是由 x 生成的，x' 是 C_2 中的任意元素。由(b)，因为 z 属于 C_1 和 C_2 中，所以 $x'Cz$ 和 zCx；由(3)，$x'Cx$，根据定义，所以 x' 属于 C_1。因此，C_2 中的每个元素都属于 C_1；类似地，C_1 中的每个元素都属于 C_2，所以 C_1 和 C_2 完全相同。

(d)假设 x 属于 C_1，y 属于 C_2，而且 xCy，其中 C_1 和 C_2 是两个不同的等价类。设 C_2 是由 z 生成的；那么由定义 yCz，根据(3)有 xCz，所以由定义 x 也属于 C_2。于是 C_1 和 C_2 有一个共同的元素 x，根据(c)，它们必须完全相同，这与假设矛盾。因此，xCy 不成立；以此类推，yCx 也不成立。

社会状态。那么卡尔多原则的用途是对这些容许的社会状态排序。而在一个补偿等价类中，其他元素的存在只是为了计算的用途。假设我们将条件3解释为：任意两个容许备选对象间的选择不会因个人对其他容许备选对象的排序改变而改变（在个人对非容许的备选对象的排序改变时或在容许和非容许之间比较改变时，就不必如此）。那么以这种形式限制的卡尔多原则就满足条件3[①]。

但是即使作这样的修改，由卡尔多补偿原则所定义的社会福利函数仍与条件1不一致。由个人排序产生的社会排序不能满足公理Ⅰ和公理Ⅱ。正如西托夫斯基(Scitovsky)教授所言[②]：在卡尔多原则下存在个人排序的一个集合，使得 xPy 和 yPx 都成立。这个结论显然与真实的备选状态的社会排序的存在性是不相容的[③]。

同样，在只对两个容许的备选对象进行排序时，西托夫斯基的观点仍然适用。也就是说，一定存在其他一些在逻辑上可信的备选对象，它们可以通过补偿的方法由这两个给定的备选对象中的任何一个得到。但如同上面所说的，关于分配的初步价值判断将这些备选对象排除在考虑范围之外，惟一希望作出的社会

---

① 当然，条件3的推理同样适用于那些不想排序的备选对象；如果任何两个备选对象间的选择都独立于对容许的备选对象的嗜好，那么我们肯定该希望选择应独立于对那些不容许的备选对象的嗜好。这里我们不去讨论这个问题，继续对其他问题进行讨论。

② T. Scitovsky, A Note on Welfare Propositions in Economics, Review of Economic Studies, Vol. 9, November, 1941, 77～88.

③ 结论 xPy 和 yPx，可以看到它们与公理Ⅰ和公理Ⅱ不一致：由定义1和公理Ⅰ，由 xPy 则 yRx 不成立，而由 yPx 则 yRx，所以两者不可能同时成立。

排序是在这两个给定的备选对象之间。在两个备选对象的情形下，对卡尔多原则作简单的修改，立即可以消除这个矛盾。我们可以称之为西托夫斯基补偿原则。定义如下：xRy 的充要条件是存在一个备选对象 x' 有：

(4)$x'Cx$

和

(5)$x'Qy$

我们假设对任意两个备选对象 x 和 y，在 x 下存在一种补偿方法使得每个人与在 y 下一样好，或者在 y 下存在一种补偿方法使得每个人和在 x 下一样好。由(4)和(5)，这等于说：

(6)对任意 x 和 y，有 xRy 或者 yRx[①]。

由于 Q 是一个半序，由定义 7(a)可以得到，

(7)对任意 x，有 xQx。

根据(7)和(1)，如果 x' 和 y 都等于 x，那么(4)和(5)都成立。所以：

(8)对任意 x，有 xRx。

现在我们假设 xRy 和 yRz。由于只有两个备选对象，所以这三个备选对象 x,y,z 中必有两个是相同的。如果 $x=y$，那么由 yRz 就有了 xRz；如果 $y=z$，那么由 xRy 就有了 xRz；如果 $x=z$，那么 xRz 也就是 xRx，由(8)可知此式成立。所以：

(9)对任意的 x,y,z，如果 xRy 而且 yRz，那么 xRz。

根据(6)和(9)，在只有两个备选对象的情形中，由西托夫斯基补偿原则所定义的关系 R 是一种真正的弱序关系。这种关系

---

① 存在某些个人的社会状态排序是基于对别人财产的嫉妒，这使某些特殊的 x 和 y 将不满足(6)。

R 由西托夫斯基提出并被卡尔多所接受[①];在那些不会引起不一致的情形中可运用卡尔多原则,否则就认为这两个备选对象是无差异的。

但是,当容许的备选对象的数目不止两个时,就会察觉到西托夫斯基观点的真正压力。例如,当选择不是在自由贸易和某特定关税之间进行时,此时的问题就是对许多可能的关税目录进行排序。在这种情形下,我们来考虑西托夫斯基补偿原则。如果 R 是一个真正的社会弱序关系,那么由引理 1(d),根据定义 2 由 R 构建的无差异关系应该是传递的。我们借用一个例子来说明西托夫斯基无差异关系是不传递的,因此西托夫斯基补偿原则不是一个满足条件 1 的社会福利函数。注意到,由(4)和(5)可知,x 和 y 无差异是指:在 x 下有一种重新分配商品的方法使得每个人至少与在 y 下一样好,而且在 y 下也有一种重新分配商品的方法使得每个人至少与在 x 下一样好。假设现在有两种商品、两个人和三个备选社会状态,每个社会状态通过在该状态下每个人所拥有的每种商品的数量来描述。相应的描述见下表:

社会状态	个人 1		个人 2	
	商品 1	商品 2	商品 1	商品 2
x	2.0	1.0	2.0	1.0
y	1.7	1.3	1.8	1.1
z	1.0	2.0	1.0	2.0

① T. Scitovsky, "A Reconsideration of the Theory of Tariffs," Review of Economic Studies, Vol. 9, Summer, 1941, 92~95. "如果(通过两个给定情形的团体的无差异曲线)相交,……按照我们的惯例,我们认为这两个情形是一样好。"(94~95)。同样也可以见 N. Kaldor, "A Comment," Review of Economic Studies, Vol. 14, No. 1, 1946~1947, 49。

假设每个人根据他在每个社会状态下拥有的商品束对社会状态排序。令(a,b)表示一个商品束，其中a是商品束中第一个商品的数量，b是商品束中第二个商品的数量。假设个人1的无差异图形是：(按照从优到劣的顺序)，(2.1，1.0)，(1.0，2.0)，(2.4，0.7)，(1.7，1.3)，(2.0，1.0)，而且经过(1.0，2.0)的无差异曲线上不包含第二个商品数量少于0.9的商品束。类似地，个人2的无差异图形是下面的顺序：(1.4，1.4)，(1.0，2.0)，(1.6，1.3)，(1.8，1.1)，(2.0，1.0)，而且经过(1.0，2.0)的无差异曲线上不包含第二个商品的数量少于1.2的商品束。由此可以看到无差异图形具有这些性质，即无差异曲线是连续的、凸的、下斜的。

在状态y中，每个人都好于状态x，至少不差于状态x，所以显然在状态y中存在一种将商品的重新分配的方法使得每个人都不差于在状态x下。另一方面，在状态x中总共有4个单位的商品1和2个单位的商品2。假设在状态x中我们将商品重新分配如下：给个人1第一个商品2.4个单位和第二个商品0.7个单位，其余的都给个人2，即给个人2第一个商品1.6个单位和第二个商品1.3个单位，那么此时两个人都比在状态y下好。所以在x下有一种重新分配商品的方法使得每个人至少和在y下一样好，因此根据上面的西托夫斯基无差异关系的定义，就有状态x和状态y是无差异的。

通过观察他们的偏好类型，显然在状态z下两个人都好于在状态y下。另一方面，在状态y下有3.5个单位的商品1和2.4个单位的商品2。将它们重新分配如下：个人1的商品束是(2.1，1.0)，个人2是(1.4，1.4)，那么两个人都好于在z下。所以又有状态y和z是无差异的。

下面将证明状态x和z不是无差异的。很明显每个人都认

为 z 好于 x。对于个人 1 而言,如果要求至少和 z 一样好,那么他至少要拥有 0.9 个单位的商品 2,而对于个人 2 而言,必须至少拥有 1.2 个单位的商品 2。因此任何一种关于商品的重新分配中要使两个人至少和在 z 下一样好,那么就必须有至少 2.1 个单位的商品 2;但是在状态 x 下只有 2 个单位的商品 2。所以在状态 x 下的任何一种重新分配商品的方法都会使得至少有一个人比在 z 下差,因而 x 和 z 不是无差异的,所以西托夫斯基无差异关系不是传递的。

状态 x 和状态 y 之间的比较解释了不涉及真实支付的补偿原则在形式上的另一种困难。对于每个人,在一个状态下都好于在另一个状态下是可能的(如在这里,状态 y 比状态 x 要好),然而,在状态 x 下存在一种重新分配商品的方法使得每个人都不差于原来明显好一些的状态 y。这充分表明了那些无法完成的重新分配是无关的。

需要注意的是:这里针对各种形式的补偿原则所提出的观点,与补偿原则涉及当前状态的过分神圣性的争论无关。后一观点等于是从伦理的角度反对隐含在原则中的某个价值判断,而前面的观点大体上是指补偿原则所定义的价值判断,它与将社会作为一个整体来作出理性选择的可能性是不一致的。

5 社会福利函数的一般可能性定理

5.1 备选对象的总数

3.6 节和第 4 章对特殊的社会福利函数的讨论，充分说明了构造满足条件 1～5 的社会福利函数的困难。4.2 节给出的西托夫斯基补偿原则的例子就表明了，备选对象的总数是两个的情形和总数超过两个的情形是不同的。事实上，如果只有两个备选对象，构造这样一个社会福利函数是可能的。当然条件 1 必须为此修改。现在我们要求，从所讨论的两个备选对象的任意个人排序集合中都能得到一个满足公理 I 和公理 II 的社会排序。

定义 9 少数服从多数的决策方法是指这样的社会福利函数，xRy 成立的充要条件是认为 xR_iy 的人数大于等于认为 yR_ix 的人数。

不难看出，当只有两个备选对象时，少数服从多数的决策方法满足条件 1～5。为了证明它满足条件 1，我们必须证明所定义的 R 是一个弱序，即它是连通的和传递的。为方便起见，令 N

(x,y)表示认为xR_iy的总人数。于是：

(1) xRy成立的充要条件是$N(x,y)\geqslant N(y,x)$。

显然，要么$N(x,y)\geqslant N(y,x)$，要么$N(y,x)\geqslant(N(x,y)$，所以：

(2) 对任意的x和y，有xRy或者yRx。

由(1)得，R是连通的。下面证明传递性。假设xRy且yRz。因为只有两个备选对象，所以x,y,z中必有两个是相同的。如同在西托夫斯基补偿原则时已经说明的那样，如果$x=y$或$y=z$，那么显然有xRz。当$x=z$时，证明xRz就等价于证明xRx。由(1)，xRx等价于$N(x,x)\geqslant N(x,x)$，而这当然成立。因此，传递性也成立。连同(2)，这证明了R是一个弱序，所以有：

(3) 少数服从多数的决策方法满足条件1。

下面证明它满足条件2。令$R_1,\cdots,Rn$满足xPy，即xRy而yRx不成立。由(1)，这意味着有$N(x,y)\geqslant N(y,x)$，而$N(y,x)\geqslant N(x,y)$不成立，即有：

(4) $N(x,y)>N(y,x)$。

令$R'_1,\cdots,R'_n$是满足条件2的假设的一个新的个人排序集合，即对于任意$x'\neq x$和$y'\neq x$，$x'R'_iy'$充要条件是$x'R_iy'$；如果xR_iy'，那么xR'_iy'；如果xP_iy'，那么xP'_iy'。特别当$y'=y$时考虑后两个条件。

(5) 如果xR_iy，那么xR'_iy；

(6) 如果xP_iy，那么xP'_iy。

假设对某个人i，有yR'_ix。由定义1，xP'_iy不成立，所以由(6)，xP_iy也不成立。因此由引理1(e)，有yR_ix。即

(7) 如果yR'_ix，那么yR_ix。

令$N'(x,y)$是认为xR'_iy的人数；类似的，$N'(y,x)$是认为yR'_ix的人数。由(5)，认为xR_iy的每个人都认为xR'_iy；因此

$N'(x,y) \geqslant N(x,y)$。类似地，由(7)有 $N(y,x) \geqslant N'(y,x)$，由(4)，有 $N'(x,y) > N'(y,x)$，或者说 $N'(x,y) \geqslant N'(y,x)$ 而 $N'(y,x) \geqslant N'(x,y)$ 不成立。由(1)，这就是指 $xR'y$ 而 $yR'x$ 不成立，其中 R' 是对应于个人排序 $R_1', \cdots, R_n'$ 的社会排序，由定义 1 可知 $xP'y$。所以满足条件 2。

在这里条件 3(对无关的备选对象的独立性)是显然的。由于只有两个备选对象，包含多于一个元素的集合 S 就是整体。如果 S 中只包含一个元素，那么 $C(S)$ 就是这个元素，当然与不在 S 中的元素独立；如果 S 中包含两个元素，因为 S 外没有元素，$C(S)$ 当然由 S 中的元素的个人排序决定。

下面证明满足条件 4。对任意的 x 和 y，假设任何人 i 都认为 yP_ix。即每个人都认为 yR_ix，而没有人认为 xR_iy。因此，$N(y,x) \geqslant N(x,y)$ 但是没有 $N(x,y) \geqslant N(y,x)$。由(1)，yPx，所以由定义 1，xRy 不成立。因此，xRy 不独立于个人排序 $R_1, \cdots, R_n$。

最后，证明条件 5(非独裁性)，假设存在一个人 i 满足定义 6 的条件。称他为 1。假设 xP_1y，而对于所有 $i \neq 1$ 有 yP_ix。那么，xR_1y，而对于所有 $i \neq 1$，xR_iy 不成立，由定义 1，所以 $N(x,y) = 1$。同时对于所有 $i \neq 1$ 有 yR_ix，所以 $N(y,x) \geqslant 1 = N(x,y)$。由定义 6，$yRx$，因而根据定义 1，$xPy$ 不成立。但是根据定义 6，如果 xP_1y，那么 xPy。因此没有独裁者，所以满足条件 5。

定理 1(两个备选对象的可能性定理)　如果所有的备选对象只有两个，那么少数服从多数的决策方法是一个满足条件 2～5 的社会福利函数，而且它对任何关于两个备选对象的个人排序集合都能产生一个社会排序。

从某种意义上说，定理 1 是英美两党制的逻辑基础。

为便于后面参考，请注意上面关于少数服从多数的决策方法满足条件 2,4,5 的证明过程与只有两个备选对象这个假设没有关系。同样，不管有多少个备选对象，少数服从多数的决策方法也满足条件 3。由定义 9，显然只要每个人保持 x 和 y 的相对位置不变，那么在个人排序的任何变换下，xRy 是否成立不会改变。由定义 3，$C(S)$完全由 S 中任意两个元素 x 和 y 的排序决定；因此只要在 S 中的元素的排序不变，在个人排序的任何变化下，$C(S)$肯定不会改变。

引理 3 对任何备选对象空间，少数服从多数的决策方法是一个满足条件 2～5 的社会福利函数。

在 1.1 节中投票悖论的例子说明了，当备选对象的总数超过两个时，少数服从多数的决策方法不满足条件 1。下面我们来研究在这种情形下社会福利函数的结构。

此后，我们提到条件 1 还是指它的原来形式。

5.2 两个人和三个备选对象

为解释分析所采用的方法以及作为更一般情形的介绍，我们首先考虑在两个人对三个备选对象间的偏好选择下社会福利函数的形成。某些结论可以从条件 1～5 得到。我们将证明，假若存在一个满足条件 1～5 的社会福利函数，那么这种假设将会引出矛盾。

令 x,y,z 是需要选择的三个备选对象，例如，商品的三种可能分配方式。令 x' 和 y' 遍指三个备选对象，即它们各指 x,y,z 中的任意一个。用 1 和 2 表示两个个人，R_1 和 R_2 分别表示 1

和 2 的对三个备选对象 x,y,z 的排序。令 P_1 和 P_2 是相应的偏好关系:例如,$x'P_1y'$是指个人 1 认为 x'(严格)优于 y'。假设每个人可以按任何方式对备选对象排序。例如,假设每个人按照他对自己的个人份额的偏好对商品的每一种分配方案排序(纯粹个人主义的行为),如果现在不止一种商品,而且没有一个备选对象比另一个备选对象给每个人更多的商品,那么根据个人嗜好的改变,每个人可以按任意的在逻辑上可能的方法对备选对象排序(见 6.4 节的例子)。

结论 1 如果 $x'P_1y'$ 且 $x'P_2y'$,那么 $x'Py'$。

也就是说,如果两个人都认为 x'优于 y',那么社会也必须认为 x'优于 y'。

证明:由条件 4,存在个人 1 和 2 两个排序 R_1'和 R_2'使得相应的社会排序满足 $x'P'y'$。从 R_1'中将 x'提高(如果需要可提到最高),而另外两个备选对象相对位置保持不变,这样得到 R_1'';R_2''用同样方式从 R_2'中得到。因为我们所做的只是将 x'在每个人的排序中提高而其他备选对象的排序不变,所以按照条件 2,社会应认为 x'优于 y',所以 $x'P''y'$。根据构造,在两个排序 R_1''和 R_2''中两个人都认为 x'优于 y',社会也认为 x'优于 y'。由条件 3,社会在 x'和 y'之间的选择只依赖于个人对这两个备选对象的排序,所以不管第三个备选对象的排列位置,每当两个人都认为 x'优于 y',那么社会也会认为 x'优于 y',这就是所要证明的结论。

结论 2 假设对于 x'和 y',只要 $x'P_1y'$且 $y'P_2x'$,就有 $x'Py'$*。于是,若 $x'P_1y'$,就有 $x'Py'$。

* 原文 49 页中为:yP_2x',就有 $xP'y$。这是错误的。——译者注

也就是说,如果在给定的选择中个人 1 的愿望胜过个人 2 的反对观点,那么倘若个人 2 认为无差异或他同意 1,则个人 1 的观点将会采用。

证明:令 R_1 是认为 $x'P_1y'$ 的排序,R_2 是任意排序。令 R'_1 是和 R_1 相同的排序,而 R'_2 是将 R_2 中 x' 排到最后,而其他两个备选对象的相对位置保持不变得到的。通过构造,有 $x'P'_1y'$,$y'P'_2x'$。根据假设,有 $x'P'y'$,其中 P' 是对应于 R'_1 和 R'_2 的社会偏好。R'_1,R'_2 与 R_1,R_2 之间的差别是,在个人 2 的排序中后者相比前者 x' 被提高了。因此,由条件 2(交换 R_i 和 R'_i),由 $x'P'_1y'$,可以得到 $x'Py'$。也就是说,只要 R_1 和 R_2 满足 $x'P_1y'$,那么 $x'Py'$。

结论 3 如果 $x'P_1y'$ 且 $y'P_2x'$,那么 $x'Iy'$。

也就是说,如果两个人在给定的两个备选对象间的选择持相反的意见,那么社会认为两个备选对象是无差异的。

证明:假设结论不成立。那么对某两个排序 R_1 和 R_2 和某两个备选对象 x' 和 y',我们有 $x'P_1y'$ 和 $y'P_2x'$,但是 $x'Iy'$ 不成立。也就是说,$x'Py'$ 或者 $y'Px'$。我们假设 $x'Py'$,证明这个假设将会产生矛盾;同样的理由可以证明,如果假设 $y'Px'$ 也会产生矛盾。

不失一般性地,可以假设 x' 就是备选对象 x,$y'=y$。那么我们所讨论的这种特殊的排序是,xP_1y,yP_2x,和 xPy。因为由条件 3 在 x 和 y 之间的社会排序只依赖于两者间的个人排序,我们有:

(1) 只要 xP_1y 和 yP_2x,那么 xPy。

下面证明(1)将会产生矛盾。

假设个人1认为x优于y,y优于z;而个人2认为y优于z,z优于x,那么个人2认为y优于x。由(1),社会认为x优于y。而且两个人都认为y优于z;由结论1,社会认为y优于z。所以这说明,排序R_1和R_2使得xP_1z,zP_2x,但是xPz。由于社会对x和z的选择仅依赖于个人在x和z之间的选择,所以

(2) 只要xP_1z和zP_2x,那么xPz。

现在假设R_1的排序是y,x,z;R_2的排序是z,y,x。由结论1,yPx;由(2),xPz。所以yPz。和前面同样的理由,有:

(3) 只要有yP_1z和zP_2y,那么yPz。

如果R_1的排序是y,z,x;R_2是z,x,y。由结论1和(3)可以得到zPx和yPz,所以yPx。因此:

(4) 只要yP_1x和xP_2y,那么yPx。

如果R_1的排序是z,y,x;R_2是x,z,y。由结论1和(4)可以得到zPy和yPx,所以zPx。因此:

(5) 只要zP_1x和xP_2z,那么zPx。

如果R_1的排序是z,x,y;R_2是x,y,z。由(5)和结论(1)可以得到zPx和xPy,所以zPy。因此:

(6) 只要zP_1y和yP_2z,那么zPy。

由结论2导出的(1)可知,只要xP_1y,那么xPy。类似地,从(1)~(6),可以得到对任意两个备选对象x'和y',只要$x'P_1y'$、那么$x'Py'$。也就是说,由定义6,个人1就是一个独裁者。这违背了条件5,所以(1)是不成立的。所以结论3得证。

现在假设个人1的排序是x,y,z;而个人2的排序是z,x,y。根据结论(1):

(7) xPy。

因为yP_1z,zP_2y,根据结论3有:

(8) yIz。

由(7)和(8),xPz。但是同样有 xP_1z,zP_2x,根据结论 3 得到 xIz。这是不可能的,既有 x 优于 z 又有 x 和 z 无差异,因此存在一个满足条件 1~5 的社会福利函数的这种假设会导致矛盾。

5.3 一般可能性定理的证明

在下面的证明中,我们假设存在一个给定的社会福利函数满足条件 1~5,然后证明这个假设将会导致矛盾。不失一般性,我们假设整个备选对象空间是条件 1 所提到的由三个备选对象组成的集合。在这个集合中,任何个人排序集合都是容许的,所以我们不必讨论在每个情形中哪个个人排序集合是容许的,哪个集合是不容许的。也就是说,这里所出现的排序仅是关于上面所提到的三个备选对象的排序。如果我们希望在形式上更正确,并希望考虑所有备选对象的排序,我们用所有备选对象中三个备选对象的个人排序的容许集来代替这里只有三个备选对象的个人排序集合(两者对三个备选对象的排序是相同的)。

下面,用 V 代表个人形成的集合,特别地,V' 是只含一个人的集合,V'' 是包含所有个人的集合。

定义 10 称集合 V 对于 x 战胜 y 是决定性的,是指如果 $x \neq y$,而且对任意个人排序的容许集合,只要 V 中所有 i 都有 xP_iy 时,社会一定有 xPy。

这个定义可以解释如下:令 $\bar{R}$ 代表个人排序关系 $R_1,\cdots,R_n$ 的集合。V 中所有个人 i 都有 xP_iy 的条件限制了这些 $\bar{R}$,即限制了 $\bar{R}$ 中那些下标分量在 V 中的变化范围,它们必须具有给定的关于 x 和 y 的关系。一个给定的社会福利函数就会对每一个 $\bar{R}$

定义一个社会排序 R;按照我们的偏好模式,一般来说,有 xPy,或者 xIy,或者 yPx。假设出现这样一种情况:对所有满足条件 $V_i \in V$,都有 xP_iy"的 $\overline{R}$,相应的 R 就使 xPy;那么我们就说 V 对 x 战胜 y 是决定性的。直观来说,决定性集合这个概念可以这样解释:称个人的一个集合是决定性的是指,一旦该集合中每个人都认为 x 优于 y,不管任何人对 x 和 y 以外的其他的备选对象是什么样的偏好,社会都会认为 x 优于 y。注意一个集合可以在 x 战胜 y 时是决定性的,但对 y 战胜 x 不是决定性的。例如,在美国参议院决议的审批过程中,如果 64 个参议员同意,那么该决议就被接受,如果有 33 个参议员否决,那么该决议就被否决,所以任何 64 个参议员的集合对于"接受"战胜"否决"是决定性的,而任何 33 个参议员的集合对于"否决"战胜"接受"是决定性的。

还需说明的是,对于给定的两个备选对象 x 和 y,一个给定的个人集合是否是决定性的,这个问题是由社会福利函数来决定的,它不随着在某个指定时刻个人实在排序的改变而改变。

结论 1 设 $R_1, \cdots, R_n$ 和 $R'_1, \cdots, R'_n$ 是个人排序的两个集合,使得对给定的两个不同的备选对象 x 和 y,只要 xR_iy 就有 xP'_iy。于是,如果 xPy,就有 $xP'y$。其中 P 和 P' 分别是对应于 $R_1, \cdots, R_n$ 和 $R'_1, \cdots, R'_n$ 的社会偏好关系。

这个结论推广了条件 2。如果将 x 相对于 y 的位置提高或至少保持不变(如果原来 x 与 y 无差异,那么就将 x 提高;如果原来 x 优于 y,那么保持不变),那么不管对那些不同于 y 的备选对象的偏好是否改变,x 仍然优于 y。

证明:由前面的说明,我们假设总共只有三个备选对象。令 z 是不同于 x 和 y 的备选对象。对每一个人 i,将 R''_i 定义如下:

(1) $x'R_i''y'$的充要条件是$x'R_iy'$且有$x'\neq z$或者$y'=z$。

这等于从R_i中将z的位置移到最后，而R_i中其他备选对象的相对位置不变。很容易证明R_i''是一个弱序，即满足公理Ⅰ和公理Ⅱ。而且，对于每个人，R_i''中x和y的排序和R_i中一样，即：

(2) 对于$[x,y]$中的x'和y'，$x'R_iy'$的充要条件是$x'R_i''y'$。

由(2)和条件3，$C([x,y])=C''([x,y])$，其中$C(S)$和$C''(S)$是当个人排序集合分别为$R_1,\cdots,R_n$和$R_1'',\cdots,R_n''$时从环境S中得到的社会选择。由假设，xPy和由引理2可知，$C([x,y])$只包含一个元素x。因此，$C''([x,y])$也只包含一个元素x，或由引理2有：

(3) $xP''y$。

定义个人排序$R_1^*,\cdots,R_n^*$如下：

(4) $x'R_i^*y'$的充要条件是$x'R_iy'$且有$x'\neq z$或者$y'=z$。

所以(4)和(1)是平行的。由(1)和(4)以及定义1，对任意i，有$yP_i''z$和yP_i^*z。因此：

(5) 如果$x'\neq x,y'\neq x$，则$x'R_i^*y'$的充要条件是$x'R_i''y'$。

同样，对所有i有$xP_i''z$和xP_i^*z。由(1)可知，对所有i有$xR_i''y$和xR_iy；由假设可得，对任意i有$xP_i'y$；，所以，由(4)可得xP_i^*y。因此：

(6) 对所有的y'，如果$xR_i''y'$，那么xR_i^*y'。

(7) 对所有的y'，如果$xP_i''y'$，那么xP_i^*y'。

由(5)～(7)和(3)，条件2的假设就满足；因此，xP^*y。由(4)，用上面同样的方法，可以得到$C^*([x,y])=C'[x,y]$)。所以$xP'y$。 **证毕**

这个证明原则上还是比较简单的。介绍辅助排序关系R_i''和R_i^*的目的是为了使满足条件2的假设的两个集合可以作比较。

同时，就对给定的备选对象 x 和 y 之间的选择而言，关系 R_i' 基本上等价于关系 R_i，而关系 R_i'' 等价于关系 R_i'；这在证明的后一部分可以看到。

结论 2 如果存在某个个人排序集合 $R_1,\cdots,R_n$，使得指定的备选对象 x 和 y，对 V 中的 i 有 xP_iy，对不在 V 中的 i 有 yP_ix，并且使得相应的社会偏好关系有 xPy，那么，V 对 x 战胜 y 是决定性的。

证明：令 $R_1',\cdots,R_n'$ 是只满足条件(8)的个人排序，

(8) 对 V 中任意 i，有 $xP_i'y$。

为了证明 V 是决定性的，根据定义 10，必须证明对每一个满足(8)的排序 $R_1',\cdots,R_n'$ 相应的社会排序 R' 满足 $xP'y$。但是由(8)和假设，即对 V 中的 i 有 xP_iy，不在 V 中的 i 有 yP_ix，可以得到只要 xR_iy 就有 $xP_i'y$。根据结论 1，$xP'y$。 证毕

这个结论的意思解释如下：假设有一个观察者，他看到了每个人的排序，然后他把这些排序交给中央当局(中央当局是指按照社会福利函数从个人排序集合中形成社会排序的部门)，进一步假设这个观察者注意到，对某两个特别的备选对象 x 和 y，某个人集合 V 中的每个人都认为 x 优于 y，而不在 V 中的每个人都认为 y 优于 x，而且相应的社会排序是 x 优于 y。于是，不用再去观察其他的个人排序和社会排序，这个观察者就可以说，V 对 x 战胜 y 是决定性的。即如果个人嗜好改变，只要 V 中所有人还是认为 x 优于 y(即使他们改变了其他备选对象的排序，或者那些不在 V 中的个人完全改变了他们的排序)，那么相应的社会排序仍然是 x 优于 y。

结论 3 对于任意 x 和 y，如果 $x\neq y$，那么 V'' 对 x 战胜 y 是决定性的集合。

也就是说,如果每个人都认为 x 优于 y,那么社会也应认为 x 优于 y。

证明:如果我们交换定义 5(见 3.4 节)中的 x 和 y,那么条件 4 说,存在一个个人排序集合 $R_1,\cdots,R_n$,使得 yRx 不成立,其中 R 是对应于个人排序集合 $R_1,\cdots,R_n$ 的社会排序。由引理 1(e),这也就是说:

(9) xPy。

令 $R'_1,\cdots,R'_n$ 是满足下面条件的任意个人排序集合:

(10) 对任意 i 有 xP'_iy。

由(10),对满足 xR_iy 的 i,当然有 xP'_iy。根据(9)和结论 1 有 $xP'y$。由于这对满足(10)的任何个人排序集合都成立,所以从 V''的定义可以得到:条件是对 V''中的 i 有 xP'_iy,对满足下述条件的任意个人排序集合都有 $xP'y$,而不在 V''中的 i 有 yP'_ix(其实没有 i),由结论 2 可知,V''对 x 战胜 y 是决定性的。 证毕

结论 4 如果 V'对 x 战胜 y 是决定性的或 V'对 y 战胜 z 是决定性的,那么 V'对 x 战胜 z 是决定性的。其中 x,y,z 是三个不同的备选对象。

回忆一下,V'是一个只包含一个人的集合。结论 4 所说的是,如果一个人对给定的备选对象 x 战胜其他的某个备选对象是决定性的,那么他对 x 战胜所有备选对象都是决定性的;同样,如果他对某个备选对象战胜一个给定的备选对象 z 是决定性的,那么他对所有备选对象战胜 z 是决定性的。这些结论将导致第一个悖论。

证明:

(a) 假定 V'对 x 战胜 y 是决定性的。我们证明 V'对 x 战胜 $z(z\neq x)$也是决定性的。

记 V' 中的个人为个人 1。令 $R_1, \cdots, R_n$ 是满足条件(11)～(13)的个人排序集合：

(11) xP_1y；

(12) 对任意 i，yP_iz；

(13) 对 $i \neq 1$，zP_ix。

由(11)，对 V' 中任意 i，有 xP_iy；所以由定义 10，有：

(14) xPy。

其中 P 是对应于个人排序集合 $R_1, \cdots, R_n$ 的社会偏好关系。由(12)，对 V'' 中所有 i，都有 yP_iz。因此由结论 3 和决定性集合的定义，有：

(15) yPz。

根据条件 1，社会排序关系满足公理 I 和公理 II，因此满足引理 1(c)。所以由(14)和(15)可得：

(16) xPz。

但是，由(11)xP_1y 和(12)yP_1z，所以有 xP_1z。或者说：

(17) 对 V' 中任意 i，xP_iz。

(13) 可以写成：

(18) 对任意不在 V' 的 i，zP_ix。

由(16)～(18)，结论 2 的假设得到满足，所以 V' 必须对 x 战胜 z 是决定性的。也就是说，存在一个这样的个人排序集合，V' 中所有人(事实上，只有一个人)认为 x 优于 z，而其他人认为 z 优于 x，由社会福利函数就会得到相应的社会偏好认为 x 优于 z。根据结论 2，这足以证明 V' 对 x 战胜 z 是决定性的。

(b) 现在假定 V' 对 y 战胜 z 是决定性的。同样记 V' 中的个人为个人 1，令 $R_1, \cdots, R_n$ 是满足条件(19)～(21)的个人排序集合：

(19) 对任意 i，xP_iy；

(20) yP_1z;

(21) 对 $i\neq1$,zP_ix。

于是,类似于(a)中的证明,由(19)得到 xPy,而由(20)得到 yPz,所以 xPz。但是,由(19)和(20)、xP_1z 连同(21)可知,结论2的假设得到满足,所以同样证明了 V' 对 x 战胜 z 是决定性的。

证毕

结论 5 对任意两个备选对象 x 和 y,以及只有一个元素的任意集合 V',V' 对 x 战胜 y 是决定性的这一结论不成立。

这个结论说明,即使只有两个备选对象,没有一个人是独裁者,即,不存在这样一个人,使得,只要这个人认为 x 优于 y,那么根据社会福利函数,社会自动认为 x 优于 y。

证明:假设结论是错误的。即存在一个 V',它对 x 战胜 y 是决定性的,令 V' 中的个人为个人1。

令 y' 是不同于 x 和 y 的备选对象。那么,由假设和结论4,V' 对 x 战胜 y' 是决定性的。由于这个性质对 $y'=y$ 仍是正确的,所以我们可以说:

(22) V' 对 x 战胜任何 $y'(\neq x)$ 是决定性的。

对一个固定的 $y'\neq x$,令 x' 是不同于 x 和 y' 的备选对象。由条件1可知这个选择是可能的(因为有三个备选对象)。于是,由(22)和结论4,V' 对 x' 战胜 y' 是决定性。由(22),如果 $x'=x$,这个命题仍然成立。

(23) 如果 $x'\neq y'$,$y'\neq x$,那么 V' 对 x' 战胜 y' 是决定性的。

任取一个 $x'\neq x$,以及一个不同于 x 和 x' 的 y'',由条件1这也是可以的。那么(23)成立;因为 x',y'',x 是互不相同的,如果我们用 x' 代替 x,y'' 代替 y,x 代替 z,由结论4可以得到:

(24) 如果 $x'\neq x$,那么 V' 对 x' 战胜 x 是决定性的。

(23) 和(24)加在一起也就是说:

(25) 只要 $x' \neq y'$,那么 V' 对 x' 战胜 y' 是决定性的。

但是,根据定义 10,(25)的意思是说,对所有不同的 x' 和 y',只要 $x'P_1y'$,就有 $x'Py'$。根据定义 6,这意味着社会福利函数是独裁的,但根据条件 5,社会福利函数应是非独裁的。因此如果假设结论是错误的,就会导致与某个条件相矛盾。 证毕

下面将证明条件 1~5 会导致矛盾。用的是由条件所得前面的五个结论。令 S 是条件 1 出现的由三个不同的备选对象组成的集合。对 S 中任意两个不同的备选对象 x' 和 y' 的每一个可能的排序(有六种排序),由结论 3 可知至少存在个人的一个集合,使得它对 x' 战胜 y' 是决定性的。考虑所有这样的个人集合,即对 S 中某个 x' 战胜 S 中不同于 x' 的 y' 是决定性的所有的个人集合。在这些集合中,选择一个人数最少的集合;如果这个条件不能惟一确定这个集合,那么就选择一个人数不多于其他决定性集合的任意集合。例如,如果对 x' 战胜 y' 是决定性的所有集合中,有一个集合只有两个成员,而其他集合都多于两个成员,那么就选这两个成员的集合;另一方面,如果对 x' 战胜 y' 是决定性的所有集合中,有两个集合都有三个成员,而其他这样的集合中都多于三个成员,那么就在这两个由三个成员组成的集合中任选一个。记所选出的集合为 V_1。它对 S 中某个备选对象战胜另一个备选对象是决定性的;为方便说明,我们说,V_1 对 x 战胜 y 是决定性的。S 中只有一个不同于 x 和 y 的备选对象,记为 z。设 V_1 中人数为 k;将 V_1 中的个人记为 $1,2,\cdots,k$。余下的其他个人为 $k+1,\cdots,n$。记 V' 是只含个人 1 的集合,V_2 是包含个人 $2,\cdots,k$ 的集合;V_3 是包含个人 $k+1,\cdots,n$ 的集合。注意 V_3 中可能一个人也没有。由 V_1 的构造,我们可以得到(26)和(27):

(26) V_1 对 x 战胜 y 是决定性的。

(27) S 中某个备选对象战胜另一个备选对象是决定性的，所有集合中，至少包含 k 个成员。

根据构造，V_2 中包含 $k-1$ 个成员。因此，由(27)得：

(28) V_2 对 S 中某个备选对象战胜另一个备选对象不是决定性的。

结论 5 等价于说，如果 V' 只含一个成员，那么：

(29) V' 对某个备选对象战胜另一个备选对象不是决定性的。

令 $R_1,\cdots,R_n$ 是满足下面(30)～(32)条件的个人排序集合：

(30) 对 V' 中的 i，有 xP_iy 和 yP_iz；

(31) 对 V_2 中的 i，有 zP_ix 和 xP_iy；

(32) 对 V_3 中的 i，有 yP_iz 和 zP_ix。

由(30)和(31)以及 V'，V_1，V_2 的定义有，对 V_1 中的 i，有 xP_iy。由(26)有：

(33) xPy。

其中 P 是对应于 $R_1,\cdots,R_n$ 的社会偏好关系。根据(31)以及 R_i 是一个弱序关系，因而是传递的这一事实，就有：

(34) 对 V_2 中的 i，有 zP_iy。

根据(30)和(32)：

(35) 对不在 V_2 中的 i 有 yP_iz。

假若 zPy。那么由(34)和(35)以及结论 2，可以得到 V_2 对 y 战胜 z 是决定性的；但是这与(28)相矛盾。因此，我们必须认为 zPy 不成立，或者说：

(36) yRz。

其中 R 是对应于 $R_1,\cdots,R_n$ 的社会排序关系，P 是由它得到的社会偏好关系。根据条件 1，关系 R 是一个弱序关系，具有关于偏好的所有性质，包括传递性。因此，由(33)和(36)可得：

(37) xPz。

因为 R_i 是传递的，由(30)有：

(38) 对 V' 中的 i，有 xP_iz。

而由(31)和(32)有：

(39) 对所有不在 V' 中的 i，有 zP_ix。

根据(37)～(39)以及结论 2，可以得到 V' 对 x 战胜 z 是决定性的。但是这与(29)相矛盾。这样我们证明了当条件 1～5 都满足时，就会产生矛盾。换句话说，如果我们假设我们的社会福利函数满足条件 2 和条件 3，进一步假设满足条件 1(即当至少有三个备选对象时，个人对它们的任何排序都能得到相应的社会排序)，那么条件 4 或者条件 5 将不满足。条件 4 所说的社会福利函数是非强加的；而条件 5 所说的社会福利函数是非独裁的。

定理 2 (一般可能性定理) 如果存在至少三个备选对象，社会成员可以自由地按任何方式对它们排序，那么任何一个满足条件 2 和条件 3 的社会福利函数以及由此产生的满足公理 I 和公理 II 的社会排序一定是强加的或者是独裁的[①]。

定理 2 说明了，如果关于个人排序特性事先不作任何假设，那么没有一种投票的方法能解决 1.1 节所讨论的投票悖论。不管是复数投票，还是按比例代表制，也不管投票的方法多么复杂，同样都不能解决投票悖论。类似的，市场机制也不能产生理性的社会选择。

① 这个定理中表明的消极的结果让人立即想起，在多人博弈理论中“控制”这个概念(见 von Neumann and Morgenstern，见第 18 页注②，第 38～39 页)。

5.4 一般可能性定理的一些解释

通过分析条件1～5的含义我们来解释定理2。这里我们特别要求,社会排序是由个人排序形成的,而且关于两个备选对象之间的社会决策必须与这两个备选对象以外的其他备选对象的个人愿望相独立(条件1和条件3)。这些条件加在一起就排除了根据效用的某种直接度量,或者根据对两个备选社会状态的比较进行社会效用的个人间比较的可能性。这个观点在2.1节早已给出。所以定理2可以重新叙述如下:

当我们排除了个人间效用的可比性后,对于从个人嗜好过渡到社会偏好的方法,如果要求这些方法既令人满意,又在一个相当广的范围内对任何个人排序集合都有定义,那么这些方法要么是强加的,要么是独裁的。

上面说明中所提到的"令人满意"是指,社会福利函数不能反向反应个人愿望(条件2),而且作为结果的社会偏好可以由具有像个人排序一样的理性性质的序关系来表示(条件1、公理Ⅰ和公理Ⅱ)。

鉴于第3章中对社会福利函数的那些条件的解释,我们也可以这样叙述:如果消费者的价值观可以由个人排序来表示,那么投票者主权学说与集体理性是不相容的。

如果我们希望作出的社会福利判断,依赖于所有人的价值观,而且它是非强加的,也是非独裁的,那么我们必须放宽前面所加上的某些条件。但还是要继续坚持:效用的个人间可比性是

没有意义的，而且隐含在"令人满意"中的条件也必须保持[①]。剩下可以剔除的惟一条件是，要求对很宽范围内个人排序的任何集合都能产生社会排序这个条件。也就是说，我们必须事先对那些关于社会状态的个人排序集合 $R_1,\cdots,R_n$ 作比条件 1 更严格的限制，而且要求由与那些限制相一致的个人排序所得到的社会福利函数是令人满意的，而对其他与限制不一致的个人排序集合所得到的社会福利函数不要求是令人满意的，甚至不必定义。本书余下的部分将沿着这个方向讨论这种可能性。

① 后面这些条件引起争论的惟一部分是对理性的假设。去掉这个假设后的推论会有很大变化，以至于值得我们去探究何时能保持它的这些推论，见 2.4 节。

6 个人主义的假设

6.1 关于假设的说明

得到一个令人满意的社会福利函数的一个非常重要的可能方法是，在个人偏好模式上加上两个条件，事实上这两个条件在福利经济学的研究中总假设是不变的：(1)每个人对两个备选社会状态的比较仅仅依赖于他在两个状态下所得到的商品(以及付出的劳动)，即如果他在两个社会状态下，他自己的消费－休闲－储蓄是相同的或至少对他来说是无差异的，那么他认为这两个社会状态无差异[①]；(2)在比较两个社会状态时，如果在第一个状态下他所接受的每一种商品的数量(包括将休闲和储蓄也看成商品)都多于第二个状态，或至少有一种商品多于第二个状态，那么他将认为第一个状态优于第二个状态(这两个假设称为个人主义假设)。但是，我们将证明，在多于两个商品的世界里，这些限制并不能排除悖论。

---

① 例如，见 Samuelson，见第 14 页注①，第 222～224 页；Bergson，A Reformulation…，见 14 页注①，第 318～320 页；Lange，Foundations of Welfare Economics，见第 14 页注①，第 216 页。

我们希望规范的状态是，在一个人所作出的选择中，有某些选择是事先已知的，但不是全部选择事先都知道。事先知道在某些备选项对 x 和 y 之间的选择是 x 优于 y；另一些备选项是 x 与 y 无差异。换句话说，对于某两个备选项，知道 x 不次于 y；而已知 x 与 y 无差异这种情形可以用下面说法来代替：知道了 x 不次于 y 且知道了 y 也不次于 x。进一步我们可以假设：若知道 x 不次于 y，而不知道 x 与 y 无差异，这就是 x 优于 y；实际上由于个人主义假设给出的知识能找出真正的序关系。"已知不次于"这种关系显然是传递的，但它不是连通的，这可以通过下面例子看出。例如，有这样两个备选社会状态，第一个状态中某个人所得到的第一种商品的数量多于在第二种状态中他所得到的，而在第二种状态中他所得到的第二种商品多于在第一种状态中他所得到的。我们无法知道这个人如何来比较这两个社会状态。但另一方面，我们可以肯定地说，已知任何一个备选对象都不次于自己。和定义 7 相比较可以得到，根据个人主义假设所得到的关系"已知不次于"是一个半序。而且，如果对每个人，R_i 是他的序关系，而 Q_i 是根据个人主义假设由 R_i 所产生的上面这种半序，那么由上面的解释连同定义 8 就说明，R_i 一定与 Q_i 相容。

应该注意到，对于不同的个人，由个人主义的假设中所得到的社会备选对象的半序是不同的。这是由于每个人都按照他在该状态下得到的商品对备选对象进行排序的，而且如果一个备选对象比第二个备选对象给第一个人更多的某种商品，那给第二个人就会少一点。

我们可以形式地说，一定存在 n 个半序关系 $Q_1, \cdots, Q_n$，并且事先知道个人排序关系 $R_1, \cdots, R_n$ 分别与 $Q_1, \cdots, Q_n$ 相容。在我们构造社会福利函数之前，如果这些知识可以利用，那么我们

就会觉得，要求所定义的社会福利函数能对那些个人排序关系 $R_1,\cdots,R_n$ 的集合（其中对某个 i 而言，R_i 与 Q_i 不相容）产生相应的社会排序是多余的。因此，我们将条件 1 用下面条件来代替：

条件 1′ 个人排序关系 $R_1,\cdots,R_n$ 的容许集是指那些对于每一个 i，R_i 都与 Q_i 相容的个人排序集合。

6.2 在个人主义假设下的可能性定理

显然，由定理 2 可以知道，如果条件 1′对个人排序的容许集的限制不比条件 1 更严格，那么条件 1′将会与条件 2～5 矛盾。设 S 是由三个备选对象组成的集合，其中任意两个备选对象间都没有“已知半序”这种关系，即假设对每一个人 i，S 中任意两个不同的备选对象 x 和 y，xQ_iy 不成立。在前面所讨论过的个人主义的假设下，这样的集合的一个例子就是：在固定数量的商品的三个备选分配方案中，任意两个分配方案是这样的：第一种分配方案比第二种分配方案给某个人较多的某种商品，而第二种分配方案比第一种分配方案给他较多的是另一种商品。

我认为直观上很清楚，个人排序必须与半序 Q_i 相容这种限制对集合 S 而言根本就不是什么限制。设 $T_1,\cdots,T_n$ 是 n 个个人对集合 S 的任意排序。对每一个 i，一定存在一个排序 R_i 与 Q_i 相容，而且与 T_i 重合。在下一节引理 4 的证明中包含了这个命题的证明。根据条件 1′，个人排序集合 $R_1,\cdots,R_n$ 是容许的。条件 1 满足了但运用定理 2，条件 2～5 就不是全部满足。

定理 3 如果 $Q_1,\cdots,Q_n$ 是一个满足下面条件的半序集合：存在一个至少包含三个备选对象的集合 S，使得对任意 i，S 中

任意的 x 和 y，只要 $x \neq y$，xQ_iy 就不成立。则任何一个满足条件 1′和条件 2 以及条件 3 的社会福利函数或是强加的，或是独裁的。

推论（个人主义假设下的可能性定理） 假设存在不止一个商品而且每一个满足个人主义假设的个人排序集合都是容许的，那么每一个满足条件 2 和 3 的社会福利函数或是强加的或是独裁的。

尽管得出定理 3 的动机是为了对个人主义进行分析，但是如果要求个人排序必须与任何事先指定的半序相容，那么对于这种限制个人排序的范围的任何尝试，定理 3 的结论都适用。也就是说，如果将前面的个人主义的排序进行这样的修改，即在给某个人同样多的商品束的两个备选对象之间，该个人认为它们不是无差异的，而会衡量他所得的多少，以此为基础作出选择，他仍然会对那个给他同样多的商品，而且至少有一种商品的数量更多的备选对象更加偏好。由于我们仍然可以得到满足定理 3 的假设的集合 S，那么上面关于社会福利函数可能性的否定结论仍然适用。

如果我们假设个人对社会备选对象的愿望是根据本章中讨论的个人主义假设形成的，那么对 4.1 节中所提及的最优社会状态的分析，推论会有一些帮助。如果我们加在个人嗜好上的限制是由个人主义假设得到的，那么同样不可能得到一个令人满意的社会福利函数。如已经看到的，既然决定最优社会状态惟一的用处是为给研究社会福利函数作准备，那么在个人主义假设下，通常对最优社会状态的研究就是没有意义的。但还应该加上一个限制。如果对个人主义假设再加上一些限制，那还是有可能存在一个令人满意的社会福利函数的。事实上，在 7.2 节中将给出这样一个例子：如果在个人排序上只加上个人主义限制，那么

个人主义假设和其他限制下的最优状态仍然是最优状态。因此，如果对社会福利问题的正确处理方法是在个人主义假设上再加上一些限制，那么在任何给定的情形中社会最优在这种混合限制下一定也是社会最优状态中的一种，因此在个人主义条件下也是社会最优之一。这并没有否定新福利经济学在限制域方面的作用，我们必须在该限制域内寻求社会最优。

6.3　半序和相容的弱序

在这一节中将证明关于半序和与之相容的弱序的引理（见定义 7 和定义 8）。下面这个定理等价于斯皮尔经（E. Szpilrajn）的一个定理[①]。

斯皮尔经定理　如果 Q 是一个半序，那么一定存在一个与 Q 一致的弱序 R。

在一般的需求理论中，如果一个商品束的每个分量都大于另一个商品束，我们就可以称前者优于后者，通过这种方法就建立了一个半序。斯皮尔经定理告诉我们：对两个商品束的比较有可能构造一个完整的图形满足这个条件。也就是我们可以构造一种下斜的无差异曲线的无差异图形。将这个定理用到特殊情形时，似乎很简单。但是由于它有相当广泛的一般性，这个定理就不同寻常了。

从斯皮尔经定理，我们可以得到下面的引理。

引理 4　设 Q 是一个半序，S 是一个备选对象的集合，只要

① E. Szpilrajn, Sur l'extension de l'ordre Partiel, Fundamenta Mathematicae, Vol. 16, 1930, 386～389。感谢 J. C. C. McKinsey，他给我提供了这个文献。

$x \neq y$,且 x 和 y 都属于 S,就有 xQy 不成立;T 是建立在 S 上的弱序关系。于是,关于所有备选对象一定存在一个与 Q 相容的弱序 R,使得对 S 中任意 x 和 y,xRy 的充要条件是 xTy。

这个引理的意义如下:假设在任意可能的两个备选对象中,某些备选对象之间的选择是事先固定的,那么按照一致性方法:如果在 x 和 y 之间事先固定选择 x,而在 y 和 z 之间事先固定选择 y,那么在 x 和 z 之间就事先固定选择 x。假设有这样一个备选对象的集合 S,S 中任意两个备选对象间的选择都是事先不知道的,那么该引理表明:对于 S 中元素的任何一种给定排序,都存在一种对所有备选对象的排序方法,使得它既与 S 中给定的排序相容,也与事先作出的选择相容。换句话说,如果我们知道存在某种排序,而且我们知道根据这种排序所得到的某些选择,但是这种已知的排序不能给 S 子集中元素的选择带来任何直接的信息,对 S 中的选择也同样没有非直接的信息,即所有备选对象的排序与 S 中任何排序相容。

继续讨论需求理论的例子,如同前面,我们假设有一个根据所有边际效用是正的这个条件得到的半序。这样的半序没有直接告诉我们在给定预算平面(假设价格是正的)上的商品束是如何排序的。于是引理 4 告诉我们,根据所有边际效用都是正的这个假设,对于从给定的预算平面上进行的选择不能得到任何信息。在给定的预算平面上的商品束的任何排序都可以推广成:所有商品束的无差异图形可以由一个偏导数都是正的效用函数来表示。(当然,边际效用是正的这个假设确实告诉我们,在预算平面之上可以作出任何选择,而在预算平面之下就不用选择了。)

证明:令 Q''是具有下面(1)和(2)两个条件的任意一个半序:

(1) 对所有的 x 和 y,如果 xQy,则 $xQ''y$;

(2) 对 S 中所有的 x 和 y，如果 xTy，则 $xQ''y$。

通用的无差异关系，即对所有的 x 和 y 有 $xQ''y$，它是一个半序而且满足(1)和(2)，所以至少有一个半序 Q''满足(1)和(2)。将 Q' 定义如下：

(3) $xQ'y$ 充要条件是，对所有满足(1)和(2)的半序 Q''，$xQ''y$。

因为每一个 Q''都是半序，根据(3)和定义 7 可以得到：

(4) Q' 是一个半序。

由(1)～(3)可得：

(5) 对所有的 x 和 y，如果 xQy，则 $xQ'y$；

(6) 对所有的 x 和 y，如果 xTy，则 $xQ'y$。

假设对 S 中某两个特别的 x' 和 y'，$x'Ty'$ 不成立。令 X_1 是满足(7)或者(8)的所有备选对象 x 的一个集合：

(7) x 在 S 中，而且 xTy'；

(8) 对 S 中某个 z，有 xQz 和 zTy'。

令 Q_1 定义如下：

(9) xQ_1y 充要条件是，x 在 X_1 中或者 y 不在 X_1 中。

根据(9)和定义 7 可以得到：

(10) Q_1 是一个半序。

假设* 对某些 x 和 y，有 xQy，而且 y 在 X_1 中，那么根据(7)和(8)，或有 y 在 S 中，yTy'，由(8)得到 x 在 X_1 中；或对 S 中某个 z，有 yQz 和 zTy'。在后一情形中，因为 Q 是半序，xQy 和 yQz 导出 xQz，所以由(8)又得到了 x 在 X_1 中。因此在任何情况下，只要 xQy，且 y 在 X_1 中，则 x 也在 X_1 中。根据(9)：

(11) 如果 xQy，则 xQ_1y。

---

* 以下是为了证明(13)。——译者注

现在假设对 S 中某些 x 和 y，有 xTy，而且 y 在 X_1 中。于是，yTy'，由于 T 是一个弱序，则 xTy'，所以由(7)，x 在 X_1 中，或是有 yQz，z 在 S 中，且 zTy'。但是由于 y 和 z 都在 S 中，根据假设后一种 yQz 当且仅当 $y=z$ 时才成立。所以我们由 $zT\ y'$，有 yTy'，因而 xTy'，这就是前一种情况。由上面所说：

(12) 对 S 中的 x 和 y，如果 xTy，则 xQ_1y。

根据(10)～(12)，则 Q_1 是一个满足(1)和(2)的半序。但是因为 $y'Ty'$，所以由(7)可知 y' 属于 X_1。根据假设，由于 $x'Ty'$ 不成立，$x=x'$ 时，(7)就不成立。若 x' 属于 X_1，那么(8)必须成立，即，对 S 中某个 z，有 $x'Qz$，zTy'；但是，因为 x' 和 z 都属于 S，我们必须有 $z=x'$，所以有 $x'Ty'$，这与假设矛盾。因此，x' 不属于 X_1，因而，$x'Q_1y'$ 不成立。由(3)，$x'Q'y'$ 不成立。用 x 代替 x'，y 代替 y'，有：

(13) 对 S 中的 x 和 y，如果 xTy 不成立，那么 $xQ'y$ 也不成立。

现在假设*对某些特别的 x' 和 y'，两者关系如下：$x'Qy'$，而且 $y'Qx'$ 不成立。令 X_2 是满足下面三个条件(14)，(15)和(16)之一的所有备选对象 x 的集合：

(14) xQx'；

(15) x 属于 S，而且对 S 中某个 z，有 xTz 和 zQx'；

(16) 对 S 中的某些 z_1 和 z_2，有 xQz_1，z_1Tz_2，z_2Qx'。

定义关系 Q_2 如下：

(17) xQ_2y 的充要条件是，x 属于 X_2 或者 y 不属于 X_2。

根据(17)和定义 7，有：

(18) Q_2 是一个半序。

---

* 以下是为了证明(21)。——译者注

假设对某些 x 和 y 有 xQy,y 在 X_2 中。用 y 代替 x,那么(14)～(16)中必须有一条成立。如果是 yQx',由 xQy,那么 xQx',所以 x 在 X_2 中。如果是 y 属于 S,有 S 中某个 z,使 yTz,zQx',那么由(16)可知,x 在 X_2 中。如果是 S 中的 z_1 和 z_2,使 yQz_1,z_1Tz_2,z_2Qx',那么,由 xQy,就得 xQz_1,z_1Tz_2,z_2Qx',所以由(16)得 x 在 X_2 中。因此综上所说,有:

(19) 如果 xQy,那么 xQ_2y。

假设对 S 中某些 x 和 y,xTy,y 在 X_2 中。如果是 yQx',那么由(15)得 x 在 X_2 中。如果 S 中有某个 z,使 yTz,zQx',那么由于 xTy,有 xTz,加上 zQx',所以由(15)得 x 在 X_2 中。如果是 S 中有 z_1 和 z_2,使 yQz_1,z_1Tz_2,z_2Qx',那么由于 y 和 z_1 都在 S 中,根据假设由 yQz_1 必有 $y=z_1$,所以这就回到前面的情形 yTz_2。所以,x 在 X_2 中。

(20) 对 S 中 x 和 y,如果 xTy,则 xQ_2y。

如果 y' 属于 X_2,且 $x=y'$,则(14)～(16)中一个成立。因为根据假设,$y'Qx'$ 不成立,所以(14)就不成立。如果 y' 和 z 都在 S 中,$y'Tz$,zQx',那么由假设 $x'Qy'$,有 zQy',从而由 S 的假设有 $z=y'$,所以由 zQx',则 $y'Qx'$,这与假设矛盾。如果 S 中有 z_1 和 z_2,使 $y'Qz_1$,z_1Tz_2,z_2Qx',那么由于 $x'Qy'$ 有 z_2Qy',所以 z_2Qz_1。这就得到 $z_1=z_2$,从而 $y'Qz_1$,z_1Qx',所以 $y'Qx'$,这也与假设矛盾。所以 y' 不属于 X_2;另一方面,因为 $x'Qx'$,由(14),所以 x' 属于 X_2。所以,由(17)可得 $y'Q_2x'$ 不成立。根据(18)～(20)以及(1)～(3),$y'Q'x'$ 不成立。用 x 代替 x',y 代替 y',我们得到:

(21) 如果 xQy 而且 yQx 不成立,那么 $yQ'x$ 不成立。

根据(4)和斯皮尔经定理,存在一个对所有备选对象的弱序 R,使得:

(22) R 与 Q' 相容。

根据(5),(22),以及定义 8(c),有:

(23) 如果 xQy,则 xRy。

根据(5),(21),(22),以及定义 8(d),由 xQy 成立而 yQx 不成立,就可以得到 $xQ'y$ 成立而 $yQ'x$ 不成立,这就得到了 yRx 不成立。

(24) 如果 xQy 而且 yQx 不成立,那么 yRx 不成立。

根据(23),(24)以及定义 8,有:

(25) R 与 Q 相容。

根据(6),(22)以及定义 8(c),有:

(26) 对 S 中的 x 和 y,如果 xTy,那么 xRy。

假设 S 中有 x 和 y,xTy 不成立。因为 T 是一个弱序,所以 yTx。根据(6)和(13),有 $yQ'x$ 而且 $xQ'y$ 不成立;根据(22)和定义 8(d),xRy 不成立。连同(26)就得证明:

(27) 对 S 中 x 和 y,xRy 的充要条件是 xTy。

(25) 和(27)使引理成立。 证毕

6.4 一个实例

假设有三个可能的备选对象,而且对于每个人而言,没有一个备选对象会给他每种商品的数量都多于另一个备选对象。例如,假设有两个人,各 10 个单位的两种商品,考虑下表所描述的三种备选分配:

社会状态	个人 1		个人 2	
	商品 1	商品 2	商品 1	商品 2
1	5	1	5	9
2	4	2	6	8
3	3	3	7	7

所加上的个人主义的限制不能告诉我们两个人对这三个备选对象的排序。所有的偏好都是容许的,因而我们又回到了那种悖论成立的没有限制的原始状态。

事实上,这个例子也说明,即使进一步再作一些常用的限制也不能排除悖论。因此,在个人主义情形中,至少作为一个福利的叙述基础,有时进一步假设所有人对他们的个人状况有相同的偏好。在给定两人对社会备选状态的任何可能排序下,我们可以构建一种含有六种个人局势的偏好模式,其做法是将个人 2 的三种可能局势按其偏好列于个人 1 的三种局势之前,其中列于最后的社会备选状态由个人 1 的嗜好决定。如果在备选状态 2 中,每种商品的分配都减少 0.5 个单位,我们可以将此最后一种个人状况偏好模式嵌入一种具有凸性的无差异曲线的无差异图形中。所以,即使在偏好模式上加上凸性这个限制,也不能得到一个令人满意的社会福利函数。

本节的结论充分表明:形成社会福利函数的困难之处在于个人主义假设会得到的不同的社会态度,尤其是在个人消费有类似嗜好的情形。这就说明,对社会福利进行判断的可能性依赖于社会备选状态态度间的相似性。

6.5 单一商品的世界

如上一节所讨论的,个人主义假设对于形成一个社会福利函数是不够的,这主要是由于假设存在不止一个商品。关于单个商品情形的研究对弄清上述问题也许是有用的。

在单个商品的世界里,如果我们加上 6.1 节的条件 1 和条件 2,那么对任何人只有一种关于社会状态的排序。他完全按照

他在每个状态下所拥有的这个单个商品的数量对不同的社会状态排序。在这种情形下,个人排序不是变量;由于条件2,3,4是针对个人排序中出现某些特定类型的改变时,相应的社会排序如何改变,因此条件2,3,4也就变得不相关了。尽管条件5(非独裁的)不是完全无关的,但也变成一个相当弱的限制。任何一种不是完全与某个人的排序相一致的社会排序,都可以成为与所有条件相容的社会福利函数。例如,对每个固定的总产量,我们可以建立任意一种分配排序;于是我们对有不同的总产量的两个社会状态按总产量排序,而对有相同的总产量的社会状态任意排序。这就建立了一个与每个人的排序都不同的真正的弱序。例如,令x和y表示总产量分别为s和t的两个状态,两个状态给某个人相应的总产量分别为s'和t'。如果$s>t$,但是$s'<t'$,那么社会就认为x优于y,而个人认为y优于x。

单个商品情形和多个商品情形之间区别的实质,使得基于单个商品假设的任何福利观点在实际应用中都是令人怀疑的。最根本的困难是和在4.2节中指出的卡尔多补偿原则的困难相同:当不只有一个商品存在时,就有一个怎样使得这些商品可以用同一标准衡量的问题,即如何引入标准价值观。

6.6 博弈论中的群体选择

在多人博弈理论的最近研究中,有一个很重要的假设:每个可能的联盟按照给所有成员支付总和来对所有可能的备选策略

排序[1]。也许会问，为什么这种群体选择的函数不会遇到这里所讨论的悖论呢？的确，在博弈论中，假设每个人都是为了他自己的利益参与博弈的[2]；但是前面已经指出（见6.2节），个人主义的假设对产生一个令人满意的社会福利函数是不够的。

博弈论世界其实是一个单个商品的世界，只是它比上一节所设想的单一商品世界稍许复杂一点。如果有许多不同可能性的货币支付，对每个人来说，在这些货币支付上的任何一种概率分布也就是一个可能的社会备选对象，而且每个人不仅对货币支付排序，也对货币支付的概率分布排序。如果不再加上其他的限制，不同结果的概率就类似于不同的商品，这也就是6.2节中出现的情形。但是，为了进行理论研究，冯·诺伊曼教授和摩根斯特恩教授假设每个人完全按照货币收益的数学期望值对概率分布排序；这种排序隐含在可转移效用假设中[3]。所以对于每个人关于备选社会状态的排序又是事先给定的，这也就是上一节的情形。

6.7 个人主义与分配伦理的结合

让我们简单考虑一下关于个人价值观的一些假设，对于那些觉得新福利经济学可以直接用来解决特殊经济问题的人来说，这些假设似乎很平常。这些假设是：(1)存在一种被接受的价

① von Neumann and Morgenstern，见第18页注②，第264页。上面的论点隐含在有效集和控制的定义中。

② 见本页注①，第8～9页。

③ 见本页注①，604、629脚注。

值判断(让我们来说是被一致接受),即如果每个人按照他的嗜好都觉得在第一个社会状态中优于在第二个社会状态中,(说得更精确,每个人至少都一样好而且有一人认为优于第二个社会状态),那么第一个社会状态优于第二个社会状态;(2)在任何给定的情形中,对于不同可能的福利分配有一个能广泛接受的排序。这后一种价值判断通常看成是人人平等的形式。

在伯格森教授的著作中,这种伦理体系相当明确;第二个价值判断包含在他的相对份额命题中①。同样的伦理体系也成为了卡尔多先生和希克斯教授的补偿原则的基础(见4.2节)。最近,在解决由于欧洲的需求导致食品的成本增加这个问题时,约翰逊(Johnson)教授和莫迪里利亚尼(Modigliani)教授提出的一些建议似乎也是以上面(1)和(2)这两种价值判断为基础的②。为了避免农民的实际收入的不当波动,他们建议对食品征收一种消费税,同时对消费者按人头给予补贴。假设农产品的供应是完全没有弹性的,当这种补贴没有任何边际替代效应时,这种税收由农民得到,所以对所有消费者,任意两种商品的边际替代率都是相同的,因此它满足第一种价值判断。税收和补贴提出了一个纯粹的分配函数,而且对它们可以进行调整,使状态受控,尽管事实上按人头补贴的这种支付已经具有了人人平等的效果。

这里所假设的价值判断对每个人都是成立的。注意,即使只是叙述这些判断,我们也必须将价值观和嗜好区分清楚(见2.3节)。在任何给定的时刻,假设所有人有同样的价值观,但是随着

① Bergson, A Reformulation…,见第18页注②,第320~321页。

② D. Gale Johnson, The High Cost of Food—A Suggested Solution, Journal of Political Economy, Vol. 56, February, 1948, 54~57; Professor Modigliani's proposals are contained in a press release of the Institute of World Affairs, New York, October, 1948。

他们嗜好的改变,每一个人的价值观也会改变。我们前面关于不存在社会福利函数的观点就是基于价值观的多样性。对于现在这种一致的价值观是否还是如此呢?

第二种价值判断所表明的福利的真实分配不能简单地用金钱来表示。如萨缪尔森教授所指出的,这样的价值判断将与任何一个有着良好定义的关于社会备选状态的社会排序不一致①。在给定的环境中,实际收入的分配必须随着个人的嗜好的改变而改变。对于给定的个人嗜好的集合(如用每个人按照他的消费所形成的序关系来表示),以及给定的环境,那么一定存在一个关于购买力(用某种方法定义的)的指定分配。于是,在完全竞争的条件下将进行持续交换,直至达到最优分配。给定的实际收入分配和个人偏好惟一地决定最终结果(即社会状态)。所以,一个给定的伦理就是一种规则,这种规则将从一个给定的环境中选出的社会状态,定义成所有个人嗜好的函数。对一个给定的嗜好的集合,如果环境改变了,那么我们希望在某种意义上这种选择与根据所有社会状态的社会弱序得到的选择函数相一致。本节所讨论的伦理体系(我们可以称之为伯格森社会福利函数),就是对每一种代表个人嗜好的可能个人排序集合定义一个社会排序的一种规则。那么从数学上来说,伯格森社会福利函数与已经讨论过的社会福利函数有相同的形式,当然代表嗜好的个人排序和代表价值观的个人排序,两者解释起来稍许有所不同。而且整个函数是假定为一致成立的一些价值观的最终产品,而不是一种使得不同的价值体系相溶合的方法。如果对嗜好的范围事先不加以限制(除了它们必须是真实的嗜好,即它们必须是指个人自己的消费。但是,是可以定义的),那么事实上伯格森社会

① Samuelson,见第14页注①,第225页。

福利函数在数学上同构于在个人主义假设下的社会福利函数。因此，在个人主义假设下的社会福利函数的可能性定理（定理 3 的推论）在这里也适用；即我们不能构造一个伯格森社会福利函数（即满足价值判断（1）和（2）的社会福利函数），使得它满足条件 2～5，而且能对任意个人嗜好集合都产生一个真正的社会排序。从本质上说，这两个价值判断等于是将个人主义行为上升为一种价值判断。因此毫不奇怪，在形成社会价值判断时，这样的伦理体系并不比个人主义更成功。

当然，必须意识到条件 2～5 的意义已经改变。关于它们的有效性，前面的观点假设个人排序代表的是他们的价值观而不是他们的个人嗜好。显然，在这两种解释下条件 2，4，5 有着相同的内在的合理性。条件 3 也许有点疑问。假设只有两种商品，面包和酒。所有人都公平分配，爱喝酒的人分配到的酒应比不喝酒的人多一点，而面包要少一点。假设现在所有的酒都被销毁。由于这个现实，爱喝酒的人是否有权利得到比平等份额更多的面包呢？答案当然就是一种价值判断。我个人的感觉是，对那些不能得到的备选对象的嗜好，对于在能够得到的备选对象间的决策应没有任何作用；与现实相冲突的愿望也不应考虑，所以根据嗜好而不是价值观来重新解释条件 3 仍是一个有效的价值判断，至少对我而言就是如此。

7 作为社会福利判断的基础的类似性

7.1 完全的一致性

假设我们事先不假定每个人的偏好形式，而是假定所有人对社会备选对象有相同的偏好。这样就得到了一个有“社会感”的态度，以及一个同质的社会。如果我们不考虑那些已表达了的社会偏好，而是考虑铲除腐败之后，可能会表达的偏好，那么这种一致性的假设就是一种政治哲学的理想主义的观点[①]。在这种情形中，定义社会福利函数的一种很明显的方法就是，先选择某个人，然后将这个人的偏好作为社会偏好模式。除了社会福利函数是非独裁的这个条件以外，这种社会福利函数满足第3章所给出的其他所有条件。在本节的假设中，由于每个人的偏好都相同，谁是独裁者没有任何区别，因此非独裁的条件也就丧失了它内在的意义。

我们将此稍许推广，事先假定大多数人对社会备选对象有

---

① 见7.3节。

相同的排序;但并不需要事先知道这大多数人是哪些人。那么少数服从多数的决策方法(见定义 9)将能选出这种一致同意的排序,并将它作为社会排序。同样,第 3 章的所有条件在此也能满足。

从数学的角度看,这些结论是容易得到的。这些结论增强了 6.4 节结束时所提出的建议,即对社会备选对象有类似的态度(并不是指与个人消费嗜好类似)对于形成社会判断是必须的。能够造成这种社会态度的类似性的价值观有:对自由的渴望,对国家权力的渴望以及对平等的渴望①;而个人嗜好中的相似性就其本质而言会导致对社会备选对象愿望的相似性。一个不直接具有社会意义的愿望是延长生命,而这种愿望是人类活动最普遍的动机之一。这种愿望基本上是个人主义的,最多可拓展到少数人身上;但由于达到长寿的方法很大程度上是社会性的,因此人们对于这个特别的问题更具有类似的态度。知识的不完整,仍会造成很多差别②。各种类型的集体消费就具有这种类似的

① 这里我们认为它们本身就是目的;它们对其他目的也具有促进或阻碍功能,例如,一个认为平等是他的目的的个人决不会为了增加总产出而赞成一定程度的不平等。

② 美国医学协会(the American Medical Association)的 F. G. Dickinson 口头上建议,延长人类寿命本身也是社会福利的一个目标。由于社会中大部分活动特别是经济活动都是为了这个目的,所以这个观点特别有吸引力。相对于其他的动机,如性和名声,对长寿的渴望更具有社会性,而且不会产生很多分歧;但如果将世界看成一个整体,人口和食品供应之间的关系会是一个重要的冲突因素。但是,就人类而言,生存不是惟一的目标。在许多情形中,人们愿意放弃生命去追求其他的价值,不管这些价值是由于应该臣服的政治机构的夸张,还是对自由的渴望("宁可站着死,也不跪着生"——Dolores Ibarruri)。从更现实的角度看,长寿对短期经济调整不太敏感,不具有一种指导作用,特别是延长寿命存在许多不确定的因素。

特性。

7.2 单峰值偏好的情形

最近由邓肯·布莱克教授对可能的个人排序的范围作了一个根本的限制①。他假设,如果 $U_1,\cdots,U_n$ 分别是个人排序 $R_1,\cdots,R_n$ 的效用值,那么备选社会状态可以用一维变量以这种方式来表示:使每一个 $U_1,\cdots,U_n$ 的图形都是单峰值的。满足这个假设的例子是:战前欧洲议会的政党结构,其中有普遍认可的关于政党从左派到右派的排序。个人可以属于任何一个政党;但是每个人都意识到,面对两个对他来说都是左派的政党,他将更偏爱那个纲领不是太左的政党,对右派政党也是如此。个人选择中,先考虑左派还是右派政党就无足轻重了。

可以找到一个满足布莱克假设的经济方面的例子。假设由于技术能力的原因,要求所有工人工作同样多的小时数,并希望将工作时数固定。如果我们假设工资是按照边际生产率来支付的,那么实际工资率是所选取的工作时数的一个递减函数;因此每个社会备选对象就完全由工作时数这个数字来决定。对于每

(接上页注)对整个社会寿命的计算有很多模糊性,这在经济学的福利分析中已经发现。因此,在评价哪种死因相对重要时,曾由于死亡率忽略了死亡的年龄,而死亡的年龄决定了死亡所引起的社会损失,因而它必须加以考虑。所以需要一种新的度量方法,至少可以度量出各种死因给社会带来的损失(见 F. G. Dickinson and E. L. Welker, What Is the Leading Cause of Death? Two New Measures, Bulletin 64, Bureau of Medical Economic Research, American Medical Association, Chicago, 1948)。当然,就逻辑而言,这一过程涉及到在描述生产性的含义时碰到的所有困难。

① 见第17页注②。

个人，工资和工作时数的关系定义了一个收入一休闲变换曲线。在个人主义的假设下，我们可以认为个体对其工作时数的排序原则是这样的：考察该工作时数在其收入一休闲变换曲线上的对应点，并比较通过该点的收入一休闲无差异曲线。我们有理由假设在变换曲线上存在一个点，使得在该点的个人效用是最大的，当工作时数在这最优点两边增加或减少时个人的效用都会减少。因而就满足了布莱克的假设。

布莱克证明了：在他的单峰值的偏好假设下，假若投票的人数是奇数时，存在一个备选对象获得大多数人的投票，少数服从多数的决策方法（见定义9）将得到一些确定的结论[①]。如果整个备选对象的总数是有限的，这个结论表明：对于那些可由单峰值偏好表示的任何个人排序集合，少数服从多数的决策方法将会得到一个关于备选对象的可传递的排序；因为我们可以有一个最好的备选对象，然后我们将这个最好的备选对象排除，考虑余下的备选对象中最好的，即以在留下的其他备选对象中被多数人所偏好的备选对象作为第二好的备选对象，依此类推[②]。但是在具有任意数目个备选对象这种一般性情形中的证明还需要其他的方法。所以我们用一种正规的方法重新定义单峰值偏好的假设。

在这个假设下，存在一个对备选对象排序的方法，使得每一个个人排序都可以由一个单峰值的效用曲线来表示。由于对任意两个不同的备选对象，必须有一个备选对象优于另一个备选对象，因而这种关于备选社会状态的排序并不是一个由公理 I

① Black, On the Rationale…，见第17页注②，第26～28页；Decisions of a Committee…，见第17页注②，第250～251页。

② Black, On the Rationale…，见第17页注②，第30页。

和公理 II 所定义的那种弱序。这样的序关系类似于实数中“小于”的关系；我们可以称之为强序。

定义 11 关系 S 称为强序关系，如果：

(a) 对任意 x，有 xSx 不成立；

(b) 对任意 $x\neq y$，有 xSy 或者 ySx；

(c) 对任意 x,y,z，如果 xSy 和 ySz，那么有 xSz。

根据强序，我们可以很方便地定义“介于”这个概念。令 $B(x,y,z)$ 指“y 介于 x 和 z 之间”。

定义 12 如果 S 是一个强序，如果 xSy 且 ySz，或者 zSy 且 ySx，就称 $B(x,y,z)$。

显然，下面的引理是定义 11 和定义 12 的一个结论。

引理 5 如果 x,y,z 是两两不同的，那么 $B(x,y,z)$，$B(y,x,z)$，$B(y,z,x)$ 中有且只有一个成立。

布莱克的假设可以重新叙述如下：

单峰值偏好的假设 一定存在一个强序 S，使得对每一个 i，如果 xR_iy 且 $B(x,y,z)$，那么 yP_iz。其中 $B(x,y,z)$ 是根据定义 12 由 S 得到的介于关系。

考虑一下单峰值图形就可以看到，上面的说明对应了原先所给出的情形。

用现在的术语，布莱克建议将条件 1 改为：

条件 1″ 对所有满足单峰值偏好的个人排序集合 $R_1,\cdots,R_n$，相应的社会排序 R 是一个弱序。

我们已经看到（定理 1）：当只有两个备选对象时，少数服从

多数的决策方法是满足条件 1～5 的社会福利函数；当备选对象超过两个时，这个方法就不满足条件 1。但是，对任意数量的备选对象，少数服从多数的决策方法还是满足条件 2～5 的。我们将证明，对于单峰值偏好，少数服从多数的决策方法满足条件 1″，因此它是一个有效的社会福利函数。

和前面一样，用 $N(x,y)$ 表示认为 xR_iy 的人数，那么由定义 9，如果 R 是根据少数服从多数的决策方法形成的社会排序，就有：

(1) xRy 的充要条件是 $N(x,y) \geqslant N(y,x)$。

引理 6 如果 R 是根据少数服从多数的方法由个人排序集合 $R_1,\cdots,R_n$ 形成的社会排序，而且对所有的 i，若 xR_iy，则有 zP_iw（对给定的 x,y,z,w）。那么若 xRy，则有 zRw。

证明：设引理中假设成立，而且 xRy。我们证明 zRw。

根据假设，如果一个人认为 xP_iy，那么他也认为 zP_iw。所以：

(2) $N(z,w) \geqslant N(x,y)$。

由于 xRy 和(1)，我们有：

(3) $N(x,y) \geqslant N(y,x)$。

如果 wR_iz，那么 zP_iw 不成立。因此由假设，xR_iy 也不成立，所以 yR_ix。因而，若 wR_iz，则有 yR_ix。因此：

(4) $N(y,x) \geqslant N(w,z)$。

由(2)～(4)，则 $N(z,w) \geqslant N(w,z)$。根据(1)，有 zRw。

证毕

定理 4（单峰值偏好的可能性定理） 当个人总数是奇数时，对于任意多个备选对象，少数服从多数的决策方法满足条件 1″以及条件 2～5。

证明:由引理3,少数服从多数的决策满足条件2～5。因此只须证明,假设$R_1,\cdots,R_n$满足单峰值偏好,那么根据少数服从多数的决策方法所形成的社会排序R满足公理Ⅰ和公理Ⅱ。显然有$N(x,y)\geqslant N(y,x)$,或者$N(y,x)\geqslant N(x,y)$。所以由(1),对任意的x和y有xRy或yRx。因此R满足公理Ⅰ。

为了证明R是传递的,假设xRy,yRz。我们将证明xRz。若$x=y$,由yRz就得到xRz;若$y=z$,有xRy就得到xRz;若$x=z$,就是证明xRx,由于$N(x,x)\geqslant N(x,x)$,所以由(1)立即有xRx。

现在假设x,y,z是互不相同的。由引理5,有三种可能:

(a) $B(x,y,z)$:如果xR_iy,根据单峰值假设有yP_iz。由xR_iy和yP_iz,那么xP_iz。即由xR_iy就可以得到xP_iz。根据引理6,用x代替z,z代替w,由xRy,则有xRz。

(b)$B(y,x,z)$:假设yR_iz,而xP_iz不成立。由xP_iz不成立,有zR_ix。由yR_iz和zR_ix,有yR_ix。根据单峰值偏好的假设,用y代替x,x代替z,由yR_ix,有xP_iz。这与假设yR_iz以及xP_iz不成立相矛盾。所以如果yR_iz,那么xP_iz。根据引理6,用y代替x,z代替y,x代替z,z代替w,那么由yRz,则有xRz。

(c)$B(y,z,x)$:假设yR_iz。由单峰值偏好假设,用y代替x,z代替y,x代替z,有zP_ix。由yR_iz,zP_ix,则有yP_ix。也就是说:

(5) 若yR_iz,则有yP_ix。

令N'是认为yPi_x的人数,N是总人数,由xR_iy的充要条件是yP_ix不成立。所以:

(6) $N(x,y)=N-N'$。

如果yP_ix,则肯定有yR_ix,所以:

(7) $N(y,x)\geqslant N'$。

因为xRy,由(1),有$N(x,y)\geqslant N(y,x)$;再由(6),(7)有N

$-N' \geqslant N'$,或者:

(8) $N' \leqslant N/2$。

由(5)有:

(9) $N' \geqslant N(y,z)$。

对于每一个 i,有 yR_iz 或者 zR_iy。所以:

(10) $N(y,z)+N(z,y) \geqslant N$。

当 yRz 时,由(1),有 $N(y,z) \geqslant N(z,y)$。由(10),有 $N(y,z) \geqslant N/2$。再由(9),有 $N' \geqslant N/2$。再加上(8),有 $N' = N/2$。这与定理中假设总人数是奇数矛盾。因此,(c)这种情形不可能存在,即如果 $B(y,z,x)$,我们不可能同时有 xRy 和 yRz。

所以在可以同时有 xRy 和 yRz 的所有情形中,xRz 都成立。因此,R 是传递的,这就完整地证明了定理 4。 证毕

注意到定理 1(两个备选对象的可能性定理)其实就是定理 4 的特殊情形,这是因为:如果只有两个备选对象,个人排序一定是单峰值的。如果将每个人都认为无差异的那些备选对象看成是同一个备选对象,那么上一节所讨论的完全一致情形,就是单峰值偏好的一种特殊情形,我们可以将共同的个人排序作为这里的强序。同样注意到,在 1.1 节中提到的投票悖论的例子中,对三个备选对象排序的方法没有一个是单峰值的。

定理 4 中个人总数是奇数这个条件是不可缺少的。假设有两个人,其中一个人认为 x 优于 y,y 优于 z,而另一个人认为 y 优于 z,z 优于 x。如果把 x,y,z 间的排序看成是基本的强序,那么这些排序满足单峰值偏好的假设,于是根据少数服从多数的决策方法,有 x 与 y 无差异,以及 y 优于 z,但 x 与 z 是无差异的,而不是 x 优于 z。

假定个人总数是奇数,当不同个人的排序都满足单峰值偏好假设时,在关于环境的某些假设下,我们就可以通过考虑任意两个备选对象,让每个人在两者间投票,从中选出拥有多数票的

备选对象,这样两两比较,就会得到我们的社会选择。事实上,如布莱克指出的,如果有了单峰值偏好的假设,就不必用任意两个备选对象都比较的方法来得到最优的备选对象;只需先得到每个人的第一选择,将这些第一选择按照基本的强序排列,第一选择的中位数就是最优备选对象[①]。

事实上,布莱克对个人排序的限制使社会福利函数成为可能,这就揭示了社会态度近似性的意义。在现在这种情形中,每个人有可能改变第一选择;但是由于他们都是按同样方法对备选对象排序,因而他们必须对备选对象的分类有基本相似的态度[②]。

7.3 理想主义的地位和一致的概念

前两节的结论说明了:至少从数学角度上看,如果我们能事

---

① Black, Decisions of a Committee…,见第 17 页注②,第 250 页。

② 在此,我需要说明,布莱克的工作是用来分析实际的政治行为的,而不是分析社会福利的。他设想一个委员会,该委员会有一系列行动提议。委员会先在两个提议间作出选择,然后在获胜者与第三个提议间作出选择,以此类推,在作出 n 次选举后的获胜的提议和第 $n+1$ 个提议进行选择。但布莱克假设每个人在这一过程中的每一步按照他的排序进行投票。这只有在没有人会为了最终结果更合他的意而歪曲自己的真实意图时才成立;倘若如此,如果他知道没有人会歪曲自己的排序,那他也不会歪曲自己的排序。下面的例子表明了这个结论是错误的。设个人 1 的排序是 x, y, z;个人 2 的排序是 y, x, z;个人 3 的排序是 z, y, x。假设按照 y, z, x 的顺序进行选择。如果所有人按照他们的排序投票,先在 y 和 z 间进行投票,y 获胜;然后在 y 和 x 间进行投票,y 获胜。但是,个人 1 为了保证 x 获胜,在第一次投票中选择 z;然后在 z 和 x 间进行投票,如果个人 2 和个人 3 按照他们的排序投票,那么 x 获胜。所以个人 1 就肯定有歪曲他的排序的动机。尽管不是完全相同但这个问题类似于多人博弈。从多人博弈中为了得到理性的解答所需的复杂分析可以看到这种相当普遍的投票问题的困难(见 von Neumann and Morgenstern,见第 18 页注②,第 431～445 页)。布莱克也注意到这个困难(见 On the Rationale…,见第 17 页注②,29 脚注)。

先将个人嗜好限制在具有所描述的类似性范围中，那么构造出一个合适的社会福利函数是可能的。这些数学限制或者其他的数学限制是否具有社会含意呢？我对此没有明确的答案，但有一些反思和尝试性的建议，它们主要在于以下方面：在大量谈论社会道德的文献中，有一小部分观点与数学有关。

在 7.1 节中，个人对社会备选对象的排序完全一致这一假设似乎与现实相矛盾。确切地说，这个假设是以理想主义学派政治哲学中的大部分内容为基础的。这一学派中一个基本的学说是：我们必须将个人意志和一般意志区别开。在不同的外部影响的变化下，个人意志在任何指定的时刻都存在；而一般意志是存在于所有人的内心中，而且每个人的一般意志都是相同的。社会道德就是基于这种一般意志的。这个观点在卢梭(Rousseau)、康德(Kant)、格林(Green)等人的著作中已经阐述了[①]。事实上，在个人意志和真正的一般意志间存在相当大的分歧，个人意志可以被环境败坏，而一般意志尽管它的意义会被误解，但它永远不

---

① J. J. Rousseau, The Social Contract, English translation, New York and London, G. P. Putnam's Sons, second edition, revised, 1906, 25; I. Kant, Fundamental Principles of the Metaphysic of Morals, in Kant's Critique of Practical Reason and Other Works on the Theory of Ethics, English translation by T. K. Abbott, fifth edition, New York, Longmans, Green and Co., 1898, 51～52; T. H. Green, Lectures on the Principles of Political Obligation, New York and London, Longmans, Green and Co., 1895, 44～48, 125～126. "对于政治的或自由的社会基础而言，从属于法律的每个人都参与对法律的表决是必要的(并不是当然的)，而他应当接受法律对他的制约这更不是当然的，但这一基础应代表一种共同利益的思想。并且每一成员可有他自己的利益，只要他是理性的，即能够感知共同利益，然而特殊的激情会使他忽视它，从而使用武力防止这样做成为必要，一旦他受到共同利益的感知的影响，他就会愿意放弃这样做。"(Green，同上，第 126 页)(见 Knight, Ethics and Economic Reform，见第 19 页注③，第 78 页)。

会犯错误；事实上，两者只是在很偶然的情形中才会一致[1]。但必须承认，一般意志的存在是社会存在的基础[2]。

康德用系统性的形式从道德中发展了理想主义的观点。对于每个人他分出三种规范：法律的、实用的和道德的。法律规范与我们这里称为环境的概念相同；它代表为实现给定目的所必须的手段的知识。实用主义规范是个人寻求幸福的指导；它对应于我们这里对社会备选对象的个人排序。按照康德的观点，幸福是一个模糊的不确定的行动指南。这两种规范都具有偶然性，缺乏能够刻画道德义务的根本必须性；因此，相对于道德规范，他将它们看成是假想的规范，而道德规范则是一种客观存在的绝对律令[3]。道德规范对应于我们这里社会排序这个概念，但在某种意义上，它也是每个人的个人排序；如果每个人都是完全理性的，它也应该是每个人的意志。

道德的驱动力源于其无条件性。这种道德规范，或者称为无条件律令，必须具有完全的人际间正确性。这就是康德的意志自律的原则。为了使其成立，每个人必须将其他每个人作为自己的目的。于是对于绝对律令，康德的著名规则是采用这样的行为原则，即如果每个人都遵循这些原则，他们就不会自相矛盾。由理

---

① Rousseau，见第 109 页注①，第 35 页。

② Rousseau："倘若个人利益的冲突使社会的建立成为必然，那么也正是这种共同利益使其成为可能"（同上第 110，34 页）。Green 认为："倘若没有社会成员对共同利益的意识，也就不会有正义。没有这种意识，某些个人就会有一些权力，但其他人并没认识到这些权力是他们允许其行使的，也没有声明他们具有这种认识。而如果没有这种认识或声明，也就不会有任何正义"（见第 110 页注①，第 48 页）；"因此任何人都不会有一种权力，除非（1）成为社会的成员，且（2）存在一种社会，在该社会中某种共同利益被看作是他们自己的理想利益，是对他们中的每一个人都有好处的东西"（见第 109 页注①，第 44 页）。

③ Kant，见第 110 页注①，第 34 页。

性地遵循道德规范的个人组成的团体构成了一个“目的王国”；用我们的术语说，就构成了一个具有令人满意的社会福利函数的社会[①]。

理想主义学说概括起来就是：每个人有两种排序，一种排序在每天的行动中控制他，另一种排序适用于理想情形，从某种意义上说，后者比前者更真实。正是后面这种排序被认为是与社会选择有关，而且可以假设，真实的个人排序具有完全一致性。

要求不同个人的实用主义规范都是相同的，这种要求似乎太高了，也许不可能有具有这种性质的道德规范。7.2 节的结论说明：从数学角度看，一致性的条件并不是形成社会福利函数的必要条件，我们当然希望还能有与已经建立的条件不同的其他的一些条件，这些条件能够形成一个社会福利函数；也许社会福利函数不一定是少数服从多数的决策方法，但这必须要求在社会的目的上有某种一致，否则就不可能形成社会福利函数。如果我们否定存在两种意志的可能性或者它们的含义，那么就必须从公开表达的个人排序中发现一致性；如果我们接受存在两种意志的可能性，就可以在社会各成员的道德规范中发现这种所希望的一致性。

左派和右派的经济学家都强调，在对社会福利作出判断的过程中，社会目的是否具有一致性在其中非常关键。奈特教授的态度更明确。“我们不仅主张这样的思想对于个人是真实的，而且我们主张它是我们文化的一部分，并且是充分统一的，它也是对不同时空的社会福利函数进行比较的客观标准[②]。”这种形式对于说明道德规范的一致性不是基于形而上学的绝对性，而是

① 见第 110 页注①，第 51～52 页。

② Knight, The Ethics of Competition, in The Ethics of Competition and Other Essays，见第 17 页注①，第 41～45 页。

建立在特别的与文化相关的社会伦理规范的基础上,这是极有价值的。隐含在奈特教授的观点中的是他推断存在两种意愿;如下面将指出的,他明显认为道德规范只有通过特别的技术才能发现,而如果将一致性的概念应用到个人的实用主义规范中,则几乎是不现实的。

斯蒂格勒(Stigler)教授曾指责新福利经济学中未能将目的的一致性考虑进去[①]。在他的讨论中,无法了解他是将这种一致的目的看成是由内省或者偶然观察到的(即实用主义规范),还是将这种一致的目的看成是需要特别调查才能发现的。他的观点似乎更倾向于前者,在这一点上他受到了萨缪尔森教授对于不同的特定经济问题的要求的直接影响[②]。

关于道德规范与实用主义规范的区别是几年前多布(Dobb)先生和勒纳(Lerener)教授争论的关键问题之一[③]。对于否定在价格体系下实行社会主义经济的可能,多布的一个主要观点在于对"消费者偏好的神圣性"的攻击,特别是关于时间的偏好。"在对未来判断时,众所周知,'自然'的个人是不可靠的。"[④] 在这个问题中,以及在许多种商品投放到市场这一类情

---

① G. J. Stigler, The New Welfare Economics, American Economic Review, Vol. 33, June, 1943, 355~359,特别是第 357~359 页。

② P. A. Samuelson, Further Comment on Welfare Economics, American Economic Review, Vol. 33, September, 1943, 605 页脚注。

③ M. H. Dobb, Economic Theory and the Problems of a Socialist Economy, Economic Journal, Vol. 43, December, 1933, 588~598; A. P. Lerner, Economic Theory and Socialist Economy, Review of Economic Studies, Vol. 2, October, 1934, 51~61; M. H. Dobb, A Reply, 同上, February, 144~151; A. P. Lerner, A Rejoinder, 同上, 152~154。

④ Dobb, Economic Theory and the Problems of a Socialist Economy, 见本页注③,第 591~593 页。

形中，集体选择优于个人选择；他在格雷斯汉姆(Gresham)嗜好(taste)定律的附注中，很清楚地表示了道德规范与实用主义规范的区别，以及选择实现规范的特殊方法的必要性，多布在强调个人嗜好在出现广告和出现新产品时的可变性时，引入了个人意志对腐败应负的责任[①]。他的论述与康德关于以个人幸福为行动指南是模糊的和不确定的观点十分类似。勒纳相当正确地看到，多布"得到了某些先验的最优，而不是通过自由市场或其他方式得到的"[②]；在多布思想中有着与功利主义以及马克思主义相同的理性传统，他自己也有些忧虑："然而我并不希望跟随康德，以及'为了信仰而限制知识'。计划经济也有它自己的经济规律"，但他没有指出这些规律是什么[③]。

多布的著作明确提出了将一致性的学说作为社会伦理基础造成的悖论。凭经验，我们可以拒绝在个人表达的意志中有一致性这种想法。如果一致性是在道德规范中发现的，那它的基础是什么呢?对在自由的传统中成长的灵魂，伦理的绝对主义不能令人满意，然而它可以排除掉许多自由形式中特有的缺点。依赖于伦理的相对主义，奈特的论述会有美化当前状态这种危险，即使当前状态似乎也是一个较好的备选对象。

假定一致性是存在的，从寻求个人道德规范的一致性的观点看，选取一种选举体制或其他选择机制的问题(或者说得更广点，选择一种社会结构的问题)变成了一个与本书中大部分内容的讨论完全不同的形式，最基本的问题就变成了选择我们的体制以求最好地将实用主义规范与道德规范达成一致。卢梭正是

① Dobb, A Reply，见第 112 页注③，第 147～148 页。

② Lerner，Economic Theory and the Socialist Economy，见第112 页注③，第58 页。

③ Dobb，Economic Theory and the Problems of a Socialist Economy，见 112 页注③，第 597 页。

从这个观点讨论了不同形式的政府的相对优点[①]。

在这方面,民主依赖于这样的观点:意见的自由讨论和自由表达,是实现所有人共有的隐含道德规范的最合适的方式[②]。从这个观点看,投票并不是一种使每个人都能表达他个人利益的机制,而是每个人给出对一般意志的意见的机制[③]。

这个模型与收集一组专家的意见以作出最优判断的统计问题有着许多相同之处;在这里,个人看成是查明道德规范的专家[④]。一个反对民主的人可能认为,只有少数人有足够能力在实用主义的掩盖下辨明道德规范,他们才应该成为有用的专家;因

---

① Rousseau,见第109页注①,Book III,Chapter IV~VII。

② "所有的意志,甚至是错误的,包括众所周知的、文字的、或整理所得的,都起着重要的作用,并有助于迅速地获取最具有真理性的东西"(John Milton, Areopagitica, in Complete Poetry and Selected Prose of John Milton, New York: Modern Library,1942,690)。

③ Rousseau,见第109页注①,第165~166页。"少数服从多数原则的原理从伦理上可以作为探知真正的'一般意志'的工具,而不是使得一组利益从属于另一组利益的机制。政治讨论可以假定是为了寻求客观真理或'最佳'政策,而不是利益间的竞争。"(Knight, Economic Theory and Nationalism,见第17页注①,第296页脚注)。前一段里单引号中已经指出困难。Professor Simons也表示了同样的看法。(见H. C. Simons, Introduction: A Political Credo, in Economic Policy for a Free Society, Chicago: The University of Chicago Press,1948,7~9。)

④ O. Helmer给我指出了这个类似性。所考虑的问题是R. A. Fisher的判别分析的应用。G. L. Schuyler也为此作出了有益的贡献(The Ordering of n Items Assigned to k Rank Categories by Votes of m Individuals, Journal of the American Statistical Association, Vol. 43, December, 1948, 559~563)。Schuyler的观点主要是分级排序的投票方法,通过某种方法对不同个人加权进行修改使得他们可以比较。如果简单地将它考虑成调和不同利益的手段,就又回到了定理2的范围中;但是,更确切地是将它看成是调和某些客观现实的不同评估方法。这个模型的概率含义还没有展开,政治理论中最有趣的问题,即根据个人内在的判断力给个人加权的问题,也被忽视了。

此，柏拉图主张由一个专门的管理者小团体来作出社会选择。而一个赞成民主的人认为，所有人生来享有同等权利，大家都是上帝的儿子。当然，这与收集专家意见相类比是不完全的，因为，在社会福利问题中，收集的方法(即社会决策的方法)会影响个人的内行程度。例如，有某些人(如军官)掌权后，由于随之而来的更多的休闲和更好的生活条件，他们有能力作出更好的决策，尽管他们并不是天生比别人强；或者，掌权后他们失去了与老百姓日常生活的联系，从而降低了他们在某些问题中作出"好"决策的能力。更一般地讲，扶植一个独裁者或一个杰出人物来决定社会利益，这一行动也许会导致实用主义对道德规范的歪曲。"权力总是带来腐败；而绝对权力带来绝对腐败"(阿克顿勋爵)。

以一致性为社会行动的基础的任何观点肯定会导出：市场机制不能作为一种社会福利函数，这是因为，市场机制没能将保证一致性存在的利他主义动机考虑进去。特别地，如果一致性是指道德规范的一致性，那么由于市场肯定只表示实用主义规范，所以情况会更糟糕。这里并不否认市场作为实现某些社会最优的工具，有其用处，特别是，如果故意使实用主义规范下的行为与道德规范下的行为相一致，那么市场机制将更为有用。

7.4 关于社会备选对象的知识和含义

公开表达的意志和一些较真实的愿望可以用稍许不同的方式区别开来。任何个人都可以假设有根本的价值观，部分是生物意义上的，部分专指文化模式，但这些根本的价值观大部分是无意识的。公开的偏好是作为实现这些根本价值的工具价值。这两组价值之间的关系不是惟一的。对于给定的一组根本价值，依据个人对实现他的根本价值的最优手段和对他的根本价值是什

么的认识的多少,可以有几组不同的工具价值。第二种疏忽似乎在于多布的思想方面,比如上一节的讨论都是理想主义的传统。而第一种疏忽在经济生活中的真实性可以通过下面事实来说明,两种在化学成分上无差异的不同品牌的阿司匹林的价格比超过10比1。这里,工具价值的多样性导致人们对不同品牌的阿司匹林有不同的偏好,尽管事实上,在减轻头痛这个根本目的上,它们有同样的效果。虽然福利经济学就其形式而言,将个人的公开行为当作是不可分析的,但几乎没有几位经济学家会反对禁止虚假广告的法律。

关于这一点,必须指出,备选对象(在它上面定义社会偏好)至少可以用两种方法来解释:(1)每一个备选对象都是一个向量,它的分量是政府实际作出的各种特别的政策的价值,如税率、开支、反垄断政策、以及社会化企业的价格政策。(2)每一个备选对象是每个人的未来状态的完整描述。为方便起见,我们将"备选对象"概念的第一种解释称作"社会决策",而第二种解释称作是"社会目的"。社会目的本身就是一个根本目的或至少可以完全决定根本目的。只有在根本目的是未知时,社会目的与根本目的之间的关系才是未知的。另一方面,社会决策能全部或部分地决定社会目的;但这里两者的关系部分是社会科学的经验规律的问题,就这些学科的目前状态而言,尚无法很好了解这个关系。所以涉及社会目的排序与涉及社会决策的排序之间的关系也同样是不确定的。

抽象公理方法的最大优点之一就是,同样的体系可以有不同的解释,从而可以节省时间。在现在的情形中,不管假定变量x,y…是指社会决策还是指社会目的,第5章的观点仍然有效。所以在两种情形下问题同样严重。由于根本目的源于生物的或文化的需要,所以它们至少部分是客观的。那么,对社会目的排序虽然个人与个人不相同,但与对社会决策的个人偏好模式相

比，它更具有相似性。正是根本目的的生物和文化基础限制了对根本目的的偏好，使得社会福利函数可能形成；因此，对社会决策的社会排序必须基于对社会目的的社会排序，此外，科学和统计方法的应用，限制了由决策过渡到目的过程中的无知程度，并限制了未知因素造成的影响。

还需指出，根据本节中的分析，理智的自私学说可以由假定所有人对社会有相同的根本目的中得到证实。在这种情形中，社会问题的不同观点源自于知识的缺乏，它可以通过发现真理以及让真理公布于众来消除。在现在这种悲观主义的时代，甚至这一点似乎也是一个非常难以解决的问题，它不可能如上一世纪我们非凡的前辈解决这一类问题时那么轻松。

决策与目的之间的关系是不确定的这一事实，对于集中计划和分散计划的相对效率的争论（特别是在动态经济学中）有着重要的意义。由于中央计划者可掌握更多的事实，集中计划必然减少不确定性①。同样在集中计划下，失误所造成的影响也要大得多。但如果采用针对不确定性的理性计划方法，就不会如此②。在福利经济学的近作中，不确定性与经济系统中最优形式

① Dobb 也强调了这一点，特别是投资决策和取消的可能性之间的关系（Economic Theory and the Problems of a Socialist Economy，见第 112 页注③，第 596～597 页；以及 A Note on Saving and Investment in a Socialist Economy，Economic Journal，Vol. 49，December，1939，726～727）。

② A. G. Hart 已经很好地描述了对不确定性的理性计划所要求的弹性的类型（Risk，Uncertainty，and the Unprofitability of Compounding Probabilities，in Studies in Mathematical Economics and Econometrics，O. Lange，F. McIntyre，and T. O. Yntema，eds.，Chicago：The University of Chicago Press，1942，110～118）。不确定性计划的理性理论与统计推断的基础相同（见 A. Wald，Foundations of a General Theory of Sequential Decision Functions，Econometrica，Vol. 15，October，1947，279～313）。

的关系还没有得到充分研究①。这可能是因为缺乏有关不确定性下行为的完整理论。希克斯教授的启发性的讨论②,也由于他的确定一等价理论对不确定性约束太强而逊色许多。这种局限性哈特(Hart)教授和弗里德曼(Friedman)教授都已经指出③。

7.5 部分一致性

前两节的讨论已经隐约表明,社会福利问题的解决必须依赖于 7.1 节中一致性条件的某些推广,这种一致性也许可以通过调查从个人排序中发现,而不是在公开表达的个人排序中发现。但一致性条件的正确数学推广并不容易得到。布莱克的假设尽管很完美,但这个假设显然不适用,但也许进一步研究会改变这种论断。

立即想到的一种尝试性的推广是,假设所有人对某些选择是一致的,而对其他选择不必如此。也就是说,在所有可能的两个社会备选对象(x,y)排序中,一定存在某些排序,事先知道每个人对其感觉都相同。这些共同的感觉可以这样叙述:存在一个关于所有备选对象的半序 Q,使得所有人的排序与这个半序相一致。如果存在三个备选对象,而 Q 并不能向我们提供其中任意两个如何比较的信息,即如果有三个备选对象满足:我们无法认定其中任意两个备选对象间的选择意见的一致性,那么显然

① 最系统的讨论是由 Reder 给出的。

② J. R. Hicks, Value and Capital, second edition, Oxford, The Clarendon Press, 1946, 135。

③ Hart, 见本页注②; M. Friedman, Lange on Price Flexibility and Employment, A Methodological Criticism, American Economic Review, Vol. 36, September, 1946, 627~630。

这种部分一致性并不能排除这三个备选对象的任何一个。

这个结论可以非常严格地从定理 3 中得到。首先，假定不仅已知某些选择是一致的，而且事先知道这些选择是什么。也就是说，假设 Q 是事先已知的。令 S 是上面提到的三个备选对象的集合，由于 $Q_1,\cdots,Q_n$ 是相同的，那么关于 $Q_1,\cdots,Q_n$ 定理 3 成立。如果现在我们只假设这些选择的一致性，而不假设这些选择是什么，显然我们在个人排序上加上的限制减弱了，因此同样有，所有可能的社会福利函数是强加的或者是独裁的。

7.6 作为一种价值的决策过程

到目前为止，我们还没有尝试考虑社会状态这个向量的各个分量。这种考虑的一个特别有趣的分析认为，在定义社会状态的每个变量中，有一个变量就是社会作出决策的过程。如果选择机制本身对社会中个人也具有价值，那么这就显得更为重要了。例如，通过自由市场机制实现的分配和由政府配给实现的同样分配相比，一个人也许会更偏好于前者。如果决策过程可以广义地理解为包括作出社会决策时的整个社会心理状况，那么，与对商品的分配偏好相比，这种偏好的真实性和重要性是显而易见的。

从逻辑上说，由于在任何情形下，决策程序的选择都有一个决策过程，所以在定义决策过程时必须很仔细。但这并不是循环论证。如果 x 是描述可能社会状态的一个向量，令向量的一个分量 x_1 不是决策过程；令 x_2 是在备选的所有可能的 x_1 中作出决定的过程；类似地，令 x_n 是在所有备选的 x_{n-1} 中作出决定的过程。我们称 x_1 为第一层决策，x_2 为第二层决策，等等。于是第 n 层决策是从第 $n-1$ 层决策方法中作出选择的过程。任何一个

特别的社会状态可由(x_1，x_2，…，x_n，…)这个向量完全描述。如在描述美国政府时，我们可以说 x_1 是所提出的法案，或更精确的说法是涉及各种载入立法程序的法案；x_2 是由议会和总统决定哪些法案可制定成法律的过程；x_3 是根据宪法，选择议会和总统的过程；x_4 是修订宪法的过程。

假设对于某个 n，存在某个被所有人都倍加赞赏的 x_n，使得所有人都认为接受这个特殊的 x_n 的社会状态优于不接受 x_n 的社会状态[①]。例如，一个信奉民主的个人会认为民主地实现商品分配的任何决策都优于采取其他方式实现分配的决策，即使每个人在后一种商品分配的数量都多于前者分配的数量。类似地，在某些条件下，人们可能强烈需要一个独裁者或一个特殊的独裁者。在这种情形下，由于在决策过程上的一致的意见会克服决策本身的冲突，我们的社会福利问题也可以认为被解决了。

在每个稳定的政治结构中似乎都隐含了上面这样的评价方式。但其中还有某些经验因素在起作用：个人会认为某些政治结构优于其他的政治结构，这不仅是由于他们喜欢这些政治结构，而且是由于他们对社会上其他人的偏好模式有一些想法，他们觉得从整体上看，他们可以期望这个结构(连同在这个结构下可以期望其他人的行为)以得到一些能被他们接受的决策。这样，当对决策过程以及日常决策的看法上都有广泛的一致性时，我们就可以希望能作出社会福利判断。事实上，如上一节中所包含的，如果仅凭决策过程的一致性就要作出社会福利判断，就必须要求个人将价值更多地归因于过程，而不是归因于这过程下所得到的决策，而这与社会结构中大多数人的心理反应相距太远。

① Rousseau，见第 109 页注①，第 18～19 页："复数投票的规则本身是由一致性建立的，至少在开始时是一致的。"

8 社会选择理论的注记——1963

当准备本书的第一版时，仅用了四页的篇幅就将相关的文献加以综述。1951 年以来，围绕社会选择问题已经有了大量的讨论。在准备本书第二版时，我觉得最有效的方法是在我前面的讨论中补上由最近的讨论所引发的一系列想法。尽管这些讨论都有很高的价值，但我觉得没有必要对本书进行修改。产生重大影响的不是书中的结论①，而是对这些结论的解释以及与当代其他著作的关系。这里我也不打算详细阐述相关的文献了。

首先应注意的是，前 10 年中出现的一些关于社会选择理论的优秀叙述。巴布特(M. Barbut)对其理论基础作了相当清楚的解释②。在《应用经济》(Économie Appliquée)③ 的一个专辑中有许多关于福利经济学基础的非常有意义的论文。特别应注意的

① 但是，正如 Blau(见 8.2.4 小节)已经指出的，还必须对精确的数学结论作一些修改。

② Quelques aspects mathématiques de la décision rationnelle, Les Temps Modernes, Vol. 15, October, 1959, 725～745, trans. as "Does the Majority Ever Rule?" Portfolio and Art News Annual, No. 4 1961, 79～83, 161～168。

③ Volume 5, October-December, 1952。

是吉尔博(G. -Th. Guilbaud)对集体选择问题和一般集结问题作出的不同寻常的解释[①]。

威克里(W. Vickrey)[②] 最近的一篇文章从稍许不同的假设出发,重新考虑了本书中的主要定理的证明,并指出了某些可能的含义,以及指出了对理论基础作进一步研究的方向。他采用稍许不同的方式重述了公理,得到了一个极其简单的阐述,这使得问题的思路更加一目了然。

或许可以说,里克(W. Ricker)[③] 的工作对从个人选择汇总到集体选择问题的现状作了最为完整的总结,特别是强调了政治方面。有关的经济文献已经由罗森伯格(J. Rothenberg)[④]作了回顾。

最后,应注意的是布莱克(D. Black)的开创性工作(见 7.2 节)已经被整理成书[⑤],该书对此作了系统说明。

---

① Les théories de l'intérêt général et la problème logique de l'agrégation,见 121 页注③,第 501~584 页。

② Utility, Strategy, and Social Decision Rules, Quarterly Journal of Economics, Vol. 74,November,1960,507~535。

③ Voting and the Summation of Preferences: An Interpretive Bibliographic Review of Selected Developments During the Last Decade ,American Political Science Review,Vol. 55,December,1961,900~911。

④ J. Rothenberg ,The Measurement of Social Welfare, Englewood Cliffs, New Jersey,Prentice-Hall,1961。

⑤ The Theory of Committee and Elections , Cambridge ,U. K. , Cambridge University Press,1958。

8.1 历史回顾

必须承认，追溯社会选择理论的历史根源需要很艰辛的努力。当我第一次研究这个问题，并发现在少数服从多数的决策方法中存在矛盾时，尽管当时我没有任何文献，但我确信这不是最原始的发现，所以称之为“众所周知的投票悖论”(1.1 节)。当这个想法第一次在 1948 年 12 月的数量经济学会作为论文宣读时，怀特(C. P. Wright)教授(University of New Brumswick)让我注意南森(E. J. Nanson)的工作[①]。南森在对一个由他提出的选举方法的讨论中，稍带提及了由少数服从多数决策方法会造成不可传递的可能性(参见文献中第 213～214 页)，但对此他也没有给出早期文献。但是，从他的语气中，确实看不出这种可能性是由他自己发现的，尽管同样难以确定是否如此。

然而，吉尔博[②] 声称，早在 18 世纪孔多塞(Condorcet)就已经知道这个悖论并对之进行了研究[③]，所以将悖论称为孔多塞效应。这个研究是孔多塞所讨论的选举方法(基本上是社会选择

---

① Methods of Election, Transactions and Proceedings of the Royal Society of Victoria, Vol. 19, 1882, 197～240。

② 见第 122 页注①，第 513～515 页。

③ 主要的是指，Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix, Paris, 1785。对 Condorcet 的思想的完整的研究，见 G.-G. Granger, La Mathématique Social du Marquis de Condorcet, Paris, Presses Universitaires de France, 1956。Condorcet 对投票的研究在第三章作了详细分析，特别是在第 94～129 页对 Condorcet's Essai 作的总结。

理论)的一部分。他的工作似乎又受到博尔达(J.-C. de Borda)[①]更早的一篇论文的启发。

布莱克[②]已经给出了社会选择理论的历史。它以博尔达的工作为起点,包括孔多塞、南森、博尔达,特别是道格森(L.-Dodgson)的工作。关于道奇森的工作,布莱克发现了他一些早期未发表的小册子。在这些小册子中,道奇森分析了选举问题,并特别分析了他称为"可循环的多数"的问题。道奇森的工作和布莱克对此以及对原始环境的评论都是相当有价值的。

由于布莱克非常好地总结了社会选择理论的历史,所以在这里再介绍就显得多余了。但还需要提及几个有趣的观点。博尔达的起点是这样一个事实:从几个候选人中按复数投票方法很容易导致非常不合理的选择。他的主要观点(我认为这在后续的研究中起着决定性的作用)是,每一个投票人对候选人的整体排序对社会决策都是必需的。博尔达提出的方法就是在前面3.3节中所定义的分级排序方法。正如博达尔所言,他对两个相邻的候选人的差别定义相同的权数,对不同投票人也定义相同的权数。这首先就引起一个效用可度量的问题,其次是个人间可比性的问题。他这样做是由于无知。如果一个投票人将 B 排在 A 和 C 之间,那么我们可以假定 A,B 之间差异的程度要大于 B 和 C 之间差异的程度。同样的理由,可以假设前者的差异程度小于后者。将不同的个人投票相加以每个投票人是平等的为基础。这些观点还曾出现。古德曼(L. Goodman)和马克威茨(H.

---

① Mémoire sur les élections au scrutin, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1781, 657~665。这篇文章发表于1770年。英文翻译以及一些中肯的批评见 A. de Grazia, Mathematical Derivation of an Election System, Isis, Vol. 44, June, 1953, 42~51。

② 见第122页注⑤。

Markowitz)[①] 的观点实际上是给出了博达尔观点的公理化证明。

正如格兰奇(Granger)和布莱克所看到的,孔多塞实际上有两种不同的途径。其中一个与后面的研究及博尔达的工作最接近,被称为孔多塞准则,它规定在与其他每一个候选人比较时,得到多数票的候选人当选。这隐含地接受了我称为无关备选对象独立(3.3节)的观点。正是这个观点,孔多塞发现了运用少数服从多数的方法进行两两比较会导致不传递,因此导致了社会选择的不确定性。孔多塞的确提出几种处理一般情形的方法,但后来者没能清楚地看出这些方法。

孔多塞的第二种方法与他和其他人一起研究的陪审团理论很接近。其寓意是,投票人是某种真理的判断者,而不是在表达他们自己的偏好。这个观点基本上是一种理想主义的随机格式。这在前面也已经讨论过(7.3节后一部分)。

南森和道格森的工作也值得一提,虽然作进一步研究必须参考布莱克的工作及原始材料。他们两个人都批评了各种众所周知的投票方法,主要的依据是它们不满足孔多塞准则。所提出的大多数方法的确是不能满足这个准则的,博达尔的分级排序方法也同样如此。在已知每个投票人对所有候选人排序的基础上,南森提出下面这个程序:按分级排序的方法对候选人排序;然后去掉得票数低于平均数的候选人,再在余下的候选人中进行分级排序,重复这个过程,直到一个候选人当选。南森证明,如果有一个候选人与其他任何一个候选人相比得票数最多,那么他当选。当然,用这个方法也不能排除投票悖论。

① Social Welfare Functions Based on Individual Rankings, American Journal of Sociology, Vol. 58, November, 1952, 257~262。

道格森完全采纳了孔多塞准则,同样他也得出这样的结论:如果坚持可循环的多数,那么只能是"不要选举"[1]。这个观点相当难理解。事实上,在其他地方道奇森尖锐地指出,如果"不要选举"是一个容许的备选对象的话,那么它就等于是所有候选人都当选[2]。这似乎和前面的观点很不一致。然而,在关乎立法这件事而非候选人选择时,尤其需要指出的一个重要的经验事实是:目前的状态对所有备选建议都有一个内在的约束。

在对循环多数环境下的备选建议的讨论中[3],相当有趣的是,他引用其他规则来指出他们的结论的不合理性。就是说,他指出如果个人偏好形式上的排序作少量的交换,那么那个比其他人得票都多的候选人,就不会当选。这说明我们不承认"不要选举"的可能性或者我们不希望给那个备选对象任何偏好,它本身也是选举的一个规则。原则上讲,特别是关系到计算的工具时,规则本身就提供了一个选择候选人的方法。我不知道是否有一种简单的方法来刻画这个规则。它与南森处理三个候选人的方法相一致。

8.2 条件的正规说明以及证明的最新解释

这一节由对选择理论的几个不同角度的正规讨论组成。在8.2.1小节中,我证明有几个条件可由帕累托(Pareto)原则(即

---

① Black,见第122页注⑤,第230页。

② Black,见第122页注⑤,第232页。

③ Black,见第122页注⑤,第227~230页。

由个人偏好的一致性可以得到社会偏好)来代替。由于帕累托原则已被普遍接受，所以新的一组条件更容易与社会选择问题的其他形式相比较。在 8.2.2 小节中，我将给出关于条件互不一致的最简单的证明形式。在 8.2.3 小节中，我将叙述其他一些更强的条件，由此能得到某种类型的少数服从多数原则。这些工作归功于梅(May)和村上泰亮(Murakami)。最后，我将对定理的原来形式中的一个错误作出评论，这个错误是由布劳(Blan)发现的。

8.2.1 帕累托原则与社会福利函数的条件

帕累托原则在本书中作为补偿原则的形式已经给出(4.1 节)。这里我们给出一个稍弱的形式(只涉及严格偏好)。

条件 P 如果对所有 i，都有 xP_iy，那么 xPy。

(换句话说，如果每个人都认为 x 优于 y，那么社会也应如此。)

为了回答布劳[1] 所提出的一个重要的反对意见(这将在 8.2.4 小节讨论)，现在我用更强的条件 1′和条件 2′来代替条件 1 和条件 2。

条件 1′ 备选社会状态的所有逻辑上可能的排序都是容许的。

条件 2′ 对于给定的两个备选对象 x 和 y，设个人排序已经给定(由条件 3，这就可以决定社会排序)。假设将 x 从某些或所有个人偏好中提升，那么如果原来社会认为 x 优于 y，则变换

---

① J. H. Blau, The Existence of Social Welfare Functions, Econometrica, Vol. 25, April, 1957, 302~313。

后社会仍认为 x 优于 y。

条件 1′不必这么强，但它能保证证明的形式更简单。当满足条件 1′和条件 3 时，条件 2′等价于条件 2。

我们有：

定理 1 条件 P 可由条件 2′、条件 3 和条件 4 推出。

（条件 2′、条件 3 和条件 4 分别是：社会价值与个人价值的正向联系、对无关备选对象的独立性和公民主权）

事实上，条件 P 与结论 3 等同（5.3 节）。结论 1（它的证明有一个错误，这由布劳指出）与条件 2′等同。仔细阅读结论 2 和结论 3 的证明过程（5.4 节），就会发现它们的证明只依赖于条件 2′、条件 3 和条件 4。

在下一段中，将证明条件 1′、条件 3 和条件 P 与条件 5 不一致。条件 P 可以由条件 2′、条件 3 和条件 4 推出，即条件 1′、条件 2′、条件 3 和条件 4 与条件 5 不一致。但这新的一组条件将更容易与社会选择问题的其他形式相比较；我们将在 8.3.1 小节进行这样的比较[1]。

---

[1] 放弃并不意味着在社会选择理论的一般研究中可以不考虑条件 2 或条件 2′（社会价值观和个人价值观的正向联系）。为了描述原来一组条件的不一致性，可用帕累托原则来替代；但如果为了得到一组一致性的条件而去掉其他条件中的某个条件，那么条件 2 或条件 2′肯定比帕累托原则更强（如果我们保留条件 4，即不存在强加的社会福利函数）。例如，条件 2′的一个表示式被梅用来构造少数服从多数原则，见 8.2.3 节。

8.2.2 一般可能性定理的证明[①]

在这一小节中，我将证明：

定理 2 条件 1′、条件 3 和条件 P 与条件 5 不一致[②]。

那么，用帕累托原则替代条件 2 和条件 4 并不影响前面所谈的不一致性。而且，正如上一小节中的定理 1 所言，条件 P 也可以由条件 2、条件 3 和条件 4 推出，对定理 2 的证明类似于前面所说的对定理 1 的证明(除了用更强的条件 1′替代条件 1)。事实上，这个证明以及我所知道的任何证明都与前面书中的证明没有本质的区别，但我相信，这种证明的一般思路及各条件在其中所起的作用更清楚。

这里决定性集合的定义与前面书中定义略有不同。称一个个人集合 V 对 x 战胜 y 是决定性的是指，当 V 中的每个人都认为 x 优于 y，而不在 V 中的每个人认为 y 优于 x 时，社会认为 x 优于 y。

证明 证明分为两部分。首先，我们证明如果某个人对某两个备选对象是决定性的，那么他就是一个独裁者。而这被条件 5 所排除。因此，不可能性定理就可以很容易地由这个结论以及帕累托原则推出。

一个人对某两个备选对象是决定性的，那么他一定是独裁

---

① 这个证明原来是在我的论文中，但有一些印刷错误，见 Le principe de rationlitédans les décisions collectives, Économie Appliquée, Vol. 5, October, 1952, 469～484。

② Blau 证明了一个相应的定理(见第 127 页注①，第 309 页)，但在条件中加上了条件 2′。这是多余的；正如下面所证明的，没有条件 2′不一致性也成立。

者。这可由集体理性的假设(条件 1′加上社会福利函数的定义)、帕累托原则及对无关备选对象的独立性(条件 3)推出。为了区别,我们称这个人为 I。为了说明社会福利函数,引入下面记号(规定):

(1) 称 $x\bar{D}y$,指如果 I 认为 x 优于 y,那么就无视其他人的排序,社会都认为 x 优于 y。

(2) 称 xDy,指如果个人 I 认为 x 优于 y,而其他人的偏好为 y 优于 x,那么社会认为 x 优于 y。

这些记号仅针对条件 3(x 和 y 间的选择只依赖于所有人对这两个备选对象的偏好)。如果假定有条件 2,那这两个概念是相同的,(见 5.3 节结论 2),但这里我们假定的是帕累托原则。

注意,若 $x\bar{D}y$,则 xDy。而 xDy 等同于断言 I 对 x 战胜 y 是决定性的。

假设对某两个备选对象 x 和 y,有 xDy。首先我们假设总共有三个备选对象。记第三个备选对象为 z。假设 I 关于备选对象的排序为 x,y,z(递减的顺序)。而其他人都认为 y 优于 x 和 z,但关于 x 和 z 间的排序是任意的。那么 I 认为 x 优于 y,而其他人认为 y 优于 x。由(2),这意味着 xPy。所有人都认为 y 优于 z,由条件 P,有 yPz。根据传递性则有 xPz;这意味着只要 xP_Iz,则不管其他人的排序如何都有 xPz。用符号表示为:

(3) 若 xDy,则 $x\bar{D}z$。

再假设 xDy。现在 I 的排序为 z,x,y,其他人认为 z 优于 y 和 x。同样的方法得,xPy,以及 zPx,所以 zPy。因此:

(4) 若 xDy,则 $z\bar{D}y$。

交换(4)中的 y 和 z,那么:

(5) 若 xDz,则 $y\bar{D}z$。

在(3)中用 y 代替 x,z 代替 y,x 代替 z,则有:

(6) 若 yDz,则有 $y\bar{D}x$。

由于若 $x\bar{D}z$,则有 xDz。若 $y\bar{D}z$,则有 yDz。将(3),(5),(6)连在一起可得到:

(7) 若 xDy,则有 $y\bar{D}x$。

如果在(3),(4),(7)中交换 x 和 y,则有:

若 yDx,则 $y\bar{D}z$

若 yDx,则 $z\bar{D}x$

若 yDx,则 $x\bar{D}y$

每一个结合(7),则有:

(8) 若 xDy,则有 $y\bar{D}z$,$z\bar{D}x$,$x\bar{D}y$。

将(3),(4),(7),(8)综合起来可以有:

(9) 若 xDy,则 $u\bar{D}v$,其中 u,v 是指三个备选对象 x,y,z 中的任意两个备选对象。

即个人 I 对于三个备选对象都是独裁者。

由于条件 1′,按照布劳的观点,[①] 我们可以将这个结论推广到任意多个备选对象的情形。假设 aDb,令 x,y 是任意两个备选对象。如果 x,y 与 a,b 相同(顺序不限),第三个备选对象为 c,那么将(9)应用到这三个备选对象 a,b,c 中,令 $u=x$,$v=y$,则有 $x\bar{D}y$。如果 x,y 中只有一个不同于 a,b,那么这个加上 a,b 又是三个备选对象,又可以运用(9),则有 $x\bar{D}y$。最后,如果 x,y 都不同于 a,b,这需要两步。首先,在 a,b 中加上 x,由(9)可以得到 $a\bar{D}x$。所以 aDx。再将(9)应用到 a,x,y 中,则有 $x\bar{D}y$。那么对某两个 a,b,若 aDb,则对所有的 x,y 有 $x\bar{D}y$。即 I 是一个独裁者。由非独裁的条件(条件 5),可以得到。

---

① 见第 127 页注①,第 310 页。

(10) 对任何个人 I,以及任意两个备选对象 x,y,xDy 不成立。

证明的后一部分是投票悖论的一个适当变型。由条件 P,对任意两个有序的备选对象 x,y,至少有一个决定性集合,即由所有人组成的集合。在对某两个备选对象间的选择是决定性的所有集合中,选取一个人数最少的集合,由(10)可知,它至少包含两个人。令 V 是所选取的决定性集合,记这两个有序的备选对象为 x,y,即 V 对 x 战胜 y 是决定性的。将 V 分成两部分 V_1,V_2,其中 V_1 只包含一个人,而 V_2 是余下来的所有人的集合。记 V_3 是所有不在 V 中的个人组成的集合。现在考虑这种情形,假设 V_1 的排序是 x,y,z;V_2 中所有人的排序是 z,x,y;V_3 中所有人的排序是 y,z,x。

由于 V 对 x 战胜 y 是决定性的,V 中所有人都认为 x 优于 y,而其他人的偏好正好相反,所以 xPy。另一方面,社会认为 z 不可能优于 y。这是因为如果社会认为 z 优于 y,那么 V_2 对 z 战胜 y 是决定性的,而 V_2 的人数少于 V 中的人数。因此就有了一个人数更少的决定性集合,这是不可能的。因此 yRz。因为 xPy,所以社会必须认为 x 优于 z。于是 V_1 中的这个人又是决定性的。我们已经说明这是不可能的。

这样就产生了矛盾。　　　　证毕

8.2.3　平等原则与中立原则

由于书中所给出的条件和上一节所给出的条件,都是相互不一致的,所以不可能再增强某个条件,除非去掉别的条件。与选举实践最相符合的一种方法是减弱或者去掉集体理性这个条

件。吉尔博[①]减弱了这个条件，他只要求在连续两次决策中不出现矛盾（而不是三次决策中，因为三次决策就会有传递性）。于是在任何两个备选对象间的决策规则都是相同的假设下，他推导出他所分析的大部分内容。这个假设在后来称为"中立性"条件，定义如下：

中立性条件 设$T(x)$是备选对象集合对自身的一一对应，每个人的排序保持不变。设环境S变换为S'。那么由S中的社会选择$C(S)$经过这个变换就变为S'中的社会选择$C(S')$。

如果将选择限制在任意两个备选对象间进行，中立性条件就是说，对某两个备选对象的决定性集合与另两个备选对象的决定性集合是相同的。

在中立性假设下，吉尔博指出了比集体理性条件弱的一个形式：将一个决定性集合扩大会产生另一个决定性集合；所有人组成的集合也是一个决定性集合，在这两个条件下，决策规则由决定性集合完全刻画。然后，吉尔博试图减弱中立性假设，引入一些虚构的人，他们的偏好是事先给定的，这样来推广前面的结论（569页）。那么除了决定性集合必须包括那些虚构的理想投票人外，可以得到同样的结论[②]。

尽管人们希望中立性原则在通常的决策中都会成立，但从直观来说它并不是基础性的。实践表明，对于特定的决策必须采用特定的决策规则（例如，一种特别的少数服从多数的决策方法）。梅[③]将中立性与另一个更有意义的平等性条件相结合了。

① 见第122页注①，第555～572页。

② 这个观点太简单了，我不能确定它是否完全正确。

③ A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision, Econometrica, Vol. 20, October, 1952, 680～684。

平等性条件 对个人排序在个人间的任何置换，社会选择都保持不变。

梅对这些条件再加上一个要求，即社会选择是良好定义的，并且满足一个比社会与个人价值的正向联系稍强的条件。对于他所考虑的所有偏好（两两选择）的情形[①]，他证明了少数服从多数的投票方式是满足他条件的惟一一种社会决策方法[②]。

平等条件显然有相当的说服力。它与康德的绝对律令有密切联系。

村上泰亮[③] 推广了梅的结论，运用的是逻辑函数上的一些定理。两两间的社会选择是良好定义的，这一条件连同条件 2′（见 8.2.1 小节）成立，隐含着这样一个命题：社会偏好由一种推广的少数服从多数的投票方式来决定。更特别的是，它有一系列的步骤，每一步都是根据少数服从多数的方法来决策的，但每一步票数的结果在下一步中继续使用，并且按事先说好的，把这一

---

① 他说（见第 133 页注③，第 680 页）："因为如果我们知道对任意两个备选对象的集体偏好就可以建立一个集体选择的模式，所以（从所有集合中作出集体选择的）问题就降至两个备选对象的情形。"当然，只有假定具有传递性时这个性质才成立。否则，在两个备选对象间的选择与更多备选对象间的选择之间没有任何必然的联系。如果多于两个备选对象，那么很容易看到，许多选择的方法满足梅的条件，例如，复数投票和分级统计法。当备选对象的数目是任意有限的时候，很难对满足 May 条件的决策过程进行完整的刻画。

② 在后面的注记中，梅说明了：他的四个条件是完全独立的，即可能会发现一个社会决策过程满足一些条件而不满足另一些条件。见 A Note on the Complete Independence of the Conditions for Simple Majority Decision, Econometrica, Vol. 21, January, 1953, 172～173。这就可以得到一种将社会决策过程分类的方法，即计算所满足的 May 条件的个数。

③ Y. Murakami, Some Logical Properties of Arrowian Social Welfare Function, The Journal of Economic Behavior, Vol. 1, No. 1, April, 1961, 77～84。

结果对应的票数加入到此步的实际个人投票中去。而如果要求中立性，那么那些规定的票数就要删去①。

8.2.4 一般可能性定理的证明中的一个错误

布劳指出，一般可能性定理的证明中存在错误②。对证明的异议源于将一般性的问题简化到三个备选对象的情形。特别是，条件 2 和条件 5 隐含地假设其对于条件 1 所提到的三个元素的子集也成立。但是，上面这些条件是对所有备选对象的集合成立的，而不是对一个子集。布劳证明，如果条件 1 和条件 2 用条件 1′和条件 2′来代替，就可以避免这个问题，这在第 4 小节已经看到。但是，正如书中（第 41 页）所说明的，条件 1′是一个相当强的条件。

村上泰亮③ 建议，对备选对象不应加强条件 1，而应减弱独裁者的定义（即增强非独裁的条件）。如果将条件 5 换成：

条件 5′ 在满足条件 1 的任何三个备选对象中，至少存在一个备选对象，任何人对它都不是独裁者。

那么将 8.2.2 小节的观点稍加修改，就可以证明：

定理 3 条件 1、条件 3 和条件 P 与条件 5′不一致。

条件 5′是关于独裁的一个比较合理的推广，否认它就等于说，在真正意见不一致时作出的任何选择都存在一个独裁者。

---

① 严格说，这后一个结论只有在没有人认为两个备选对象是无差异的才成立。

② 见第 127 页注①。

③ Y. Murakami, A Note on the General Possibility Theorem of the Social Welfare Function, Econometrica, Vol. 29, April, 1961, 244～246。

8.3 什么是社会选择问题

许多著名的评论家以这样或那样的方式指出,本书很不正确地讨论社会选择问题[①]。现在我可以说,这些批评都是基于对我的观点的误解,事实上也是评论家对自己观点的完整含义有误解。通过一番仔细研究后,所有人都接受下面这个基本的描述:从任何给定的环境中作出的社会选择是关于个人偏好的一种综合。引起分歧的真正原因是加在综合过程上的那些合理的条件,在这里可以看到,分歧并不像某些过激的评论中认为的那么大。

8.3.1 福利判断

伯格森 1938 年[②] 那篇非常经典的论文为随后的讨论(特别

---

① 见 I. M. D. Little, Social Choice and Individual Values, Journal of Political Economy Vol. 60, October, 1952, 422～432; L'avantage collectif, Économie Appliquée, Vol. 5, October-December, 1952, 455～468; A. Bergson, On the Concept of Social Welfare, Quarterly Journal of Economics, Vol. 68, May, 1954, 233～252; M. C. Kemp, Arrow's General Possibility Theorem, Review of Economic Studies, Vol. 21, 1953～1954, 240～243; J. M. Buchanan, Individual Choice in Voting and the Market, Journal of Political Economy, Vol. 62, August, 1954, 334～343; E. J. Mishan, An Investigation into Some Alleged Contradictions in Welfare Economics, Economic Journal, Vol. 68, September, 1957, 445～454; G. Tullock, Appendix 2 to J. M. Buchanan and G. Tullock, The Calculus of Consent, Ann Arbor. The University of Michigan Press, 1962, 特别是第 331～334 页。

② A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics, Quarterly Journal of Economics, Vol. 52, February, 1938, 310～334。

是在我的讨论中)建立了福利判断的模式。它是古典功利主义的一种文雅的形式，但是它至少涉及了一个如何用同一标准来衡量不同个人的效用的问题。

不管读者是否乐意，我还是要重述福利判断的逻辑，这在伯格森的形式中很明确。任何社会决策对社会中的每一个成员都有影响。首先，假定每一个人都有一种评价这些影响的方法；在这里我们不去假设这种评价是基数的还是序数的。但可以认为，社会中有多少成员就有多少种评估。古典的功利主义模糊地，而伯格森则明确地要求一种第二层的评价，我称为福利判断。它是基于个人评价，对所有个人看法的一个评价；特别是，如果在每个人的评价中，两组看法无差异，那么福利判断也会认为两者无差异。

因此，个人价值观就是得到福利判断的原材料。作为一个好的经济学家，我们来更近地考察这个变换过程中的技术*(即如何由个人价值观得到福利判断的过程)，以及当投入(个人价值观)改变时，产出(福利判断)的感应。[①]

对所有可能的环境，福利判断集是由个人评估来决定的；用本书的术语，就是由对社会状态的个人排序来决定。伯格森和利特尔(Little)都接受了这个观点，并且认为应该如此，尽管他们的表述听起来有点不同。他们所争论的是：社会福利函数(按伯格森的定义)将个人嗜好看成是固定的。对给定个人排序的一个集合，伯格森的程序是：首先给每个排序定义一个相应效用指标，然后指定一个个人效用函数，将这个函数值作为社会福利的指标。但是可以假定，这样的社会福利函数对任何一个给定的个人排序集合都应有定义。如果我们用一个新的个人排序集合，按

① *括号中的内容是译者加的注。——译者注

伯格森的术语，我们就有一个新的社会福利函数，即决定所有可能的福利判断的一个新的公式。

这种形式和我所采用的形式没有什么区别；社会选择函数对每个给定的个人排序集合都有定义（见8.1节定义4）[①]。也许对我来说，用一个不同于社会福利函数的术语来描述由个人排序决定社会排序或者社会选择函数的过程要好些，尽管我已经详细解释了伯格森的定义和我的定义之间的区别（见3.4节）。所以我现在采用由肯普（Kemp）和阿西马库普罗斯（Asimakopulos）建议[②]的"规定"。但是区别主要只是在术语上；按照伯格森的意思，要有一个社会福利函数，就必须有一个"规定"[③]。

伯格森—利特尔批评的实质不是将社会选择问题当作对"规定"的选择，而是我所设的条件集能否接受的问题。这些条件是两方面的：一些是关系到由给定的社会排序集合产生的社会福利函数，另一些是关系到当个人排序改变时社会选择改变的方式。正是后面这些条件被伯格森和利特尔所反对。利特尔表示得非常清楚："如果个人嗜好改变了，我们希望对所有能设想

① 这里所用的定义要求对每一个个人排序集合都有一个社会排序；说得更好点，它是一个社会选择函数，而社会福利函数是否是一种序关系这个问题将留作为一个特别的假设。想保持的可传递性已经受到批评，也需要讨论，见8.4节。

② M. C. Kemp and A. Asimakopulos, A Note on "Social Welfare Functions" and Cardinal Utility, Canadian Journal of Economics and Political Science, Vol. 18, May, 1952, 195～200。

③ 在M. C. Kemp（见第136页注①）的批评中同样没能指出对"规定"必须作逻辑要求。他认为除特殊的选择情形外，是不能对决策过程作出选择的，因为选择程序是根据其结果作评估的。但这个观点无法改变需要规定的正确性；事实上，也就是说，对每一个选择情形（或环境），存在一个合适的方法能综合个人的排序来形成一个社会选择。这正等于说，我们能综合个人排序来形成社会选择，这样就可以从任何环境中得到社会选择。

的状态有一个新的排序;但是对于新的排序与旧的排序两者之间的差别,不应要求它与嗜好的改变之间有什么联系。所以我们可以说,一个新的世界,一个新的排序;我们不要求在世界的改变与排序的改变之间有什么对应关系①。"

与初始条件集相比,由 8.2.1 小节中修改后的条件集更能看出这个观点有多少分量。可以看到,利特尔所反对的那种要求,对应着的惟一条件是:对无关的备选对象的独立性。那么最根本的分歧就变成了是这个假设了,这将在 8.4 节进一步讨论。同样应注意到,伯格森的社会福利函数所满足的两个条件:集体理性和帕累托原则,以及第三个条件非独裁,几乎不会引起任何基本问题。

所以我可以得出这样的结论:作为对规定的选择,社会选择问题的内容不仅与批评者如伯格森、利特尔、肯普的观点相一致,而且事实上,它是他们的正面观点的逻辑推论。

8.3.2 社会决策过程

利特尔②强调,社会作出决策的规则与福利判断不相同。福利判断需要一个人作判断者;而在没有任何个人能作出评价的情形中,社会作出决策的规则却可以根据方便和必须的原则被认可。

这样的区别很有见地。我认为,这正是我所考虑的社会决策过程,而不是严格意义上说的由个人所作的福利判断。但是我还必须加上一句话,即按照我的观点,社会决策过程是对社会福利的直观想法的一个适当解释。描述社会"善"的古典问题事实上

① Social Choice and Individual Values,见第 136 页注①,第 423~424 页。

② 见第 136 页注①,第 427,430~432 页。

是一种形而上学,现代实证主义认为这是毫无意义的,但它的基础问题是真实的。我个人对此以及其他伦理问题的观点与波普(Popper),表明的一致:“相当多的形而上学的学说(当然也是哲学的学说)可解释为方法论中的人格化[①]。”自伯格森以后的所有作者都一致同意,社会善这个概念应该根据个人价值观来定义。但伯格森寻求在个人的福利判断中去定位社会价值。我赞成由社会决策的规则从社会所采取的行动中去定位社会价值。这个观点是序数论价值观的一个很自然的推广。正如个人选择和个人价值是相同的一样,我认为社会价值也不会比社会选择有更多的含义。

实际上,伯格森的描述方式并没有与根据社会决策过程解释社会福利区别开。首先,8.3.1 小节的观点说明,伯格森的社会福利函数必须是一个规则,即一个潜在的社会决策过程;实际上,单个人所作出的社会判断是由社会决策过程决定的,即如果一个人可以做得到的话,社会就采用它。其次,对每个人确定福利判断在逻辑上是可能的,但并不会令人感兴趣。任何一种解释中,“社会福利”都关系到社会决策。单个人作出的福利判断与行动没有联系,所以也是没有效果的。伯格森在 1954 年的一篇文章中提到这一点;因为将它放在这里很好,下面我就整段引用。

“我一直认为,福利经济学所关心的是劝说普通公民。如果一个政府官员被劝说,那也是将他看成普通公民。在各事例中,用作指导的是适合于劝说公民的一些伦理价值。在这些价值中,我相信我仅表达了福利著作的一般含义;或者说,如果这不是一般的含义,我认为也应该是。但还是有某些人会有不同的观念,

① K. Popper, The Logic of Scientific Discovery, New York Basic Books, 1959, 55。

这样阿罗定理也就有了另一种解释。**按照这个观点，问题就变为不再是去劝说一般公民，而是劝说政府官员。**而且，可以看成数据的价值观就不是能引导作为公民的政府官员的那种价值观。相反，政府官员可以或多或少想像成在伦理上是中立的。他的生活目标之一就是按给定集体决策的某些原则去实现其他人的价值。阿罗定理显然对这种福利经济学产生了消极作用。它发现，不存在一个一致的社会排序能够作为劝说官员的社会福利的准则①。"

只需再补充一点，我对于社会选择问题的解释就与伯格森文中黑体字的说明完全一致。

伯格森、利特尔和我都从应用的角度试图以不同的方式说明社会福利这个概念，对此布坎南(Buchanan)的实证主义更为极端②。选择只能是个人的；社会福利这个概念是不容许的。基于只有个人是理性的这个观点③，他强烈批评了我使用的"集体理性"这个术语(我的意思是，对应于给定个人排序的社会排序与满足序关系的定义是紧密相联的)。虽然如此，但布坎南和塔洛克(Tullock)④的确强调了对规则的选择是完善社会选择机制

① On the Concept of Social Welfare，242。

② Individual Choice...，见第136页注①，脚注32。

③ 我的观点是，定义多多少少是为了使用方便，没有更深的意思。但Buchanan和Little都严肃地在定义中运用了非常贴切的词语。于是，Buchanan并没有像断然否认存在集体理性那样，说我所定义的集体理性对于规则来说，是一个不令人满意的条件。毫无疑问，词语并不能在读者思想中有很清晰的解释，但是，当先有了很明确的定义时，这种混淆似乎是次要的。Buchanan和Little在某些观点上的真正的含义有些避重就轻。

④ The Calculus of Consent，见第136页注①，脚注32，Oharter 6。因为，我在后面所引用的文献大部分是消极的，我需要指出，在我看来它们所针对的并不是本文的主旨。

的重要步骤。

8.3.3 福利经济学、补偿、互换选票

与前两节所讨论的批评意见不同(它提出了重要的含义问题),我觉得我将要进行的讨论反映了一些基本知识的混淆和玩弄词藻。利特尔、伯格森和米香(Mishan)认为,我的定理不是福利经济学的一部分。利特尔说:“阿罗的工作与福利经济学的传统理论没有任何关系,这些传统理论在伯格森—萨缪尔森的描述中已经达到巅峰。”伯格森说:“这个定理与福利经济学的关系不大,甚至可以说毫无关系[①]。”最奇怪的是,没有人去讨论与我定理有关的问题,而是去考虑它到底属于哪一个知识范畴。由于利特尔和伯格森(按照利特尔所说,还有萨缪尔森)认为伯格森的社会福利函数是福利经济学的一部分,而上两节的观点说明,将福利经济学与社会选择理论分开的任何企图都是不真实的。那么不管福利经济学如何定义,至少它关系到政府如何选择经济政策。很难看出,对社会决策形式的研究怎样与福利经济学“无关”或“没关系”。

如果实在要找出福利经济学与社会选择理论有什么不同,那么区别就是福利经济学以帕累托最优为标准。这正是米沙恩的定义。根据本书中的术语,我们将自己限制在社会一致半序中,而不是社会排序。

当然,正如文献中一再重申的,这种“新福利经济学”没有提

① Little, Social Choice and Individual Vaules, 425; Bergson, On the Concept of Social Welfare, 243.

及在帕累托最优备选对象中如何选择①。社会福利函数的用途确切地说，是将一致半序延伸为一个完整的社会排序。基于新福利经济学的补偿原则并不是一个关于社会排序的合适替代品，这都已被西托夫斯基(Scitorsty)、鲍谟尔(Baumol)和其他人证明了②。但是，布坎南和塔洛克在他们的构造中还是使用了补偿原则。他们很肯定地认为，在不同问题上，选票的交易(互换选票)基本上等价于补偿支付，但他们没有意识到，作为社会决策过程的补偿原则的模糊性。塔洛克进而认为："在投票交易的过程中…… 阿罗所描述的非理性这个特殊类型是不可能的③。"他似乎认为我在描述的是决定不同问题的一个过程，而没有考虑它们之间的互补性和替代性。显然这是一种误解，如在补偿原则中我写到，我所关心的是社会状态的选择；一个社会状态是一个包括所有问题的向量，我把不同问题上的所有可能决策组合当作一个备选社会状态来考虑。很显然，这包括互换选票，但不值

---

① 对这个观点 R. G. Davis 叙述得很清楚，见 Comment on Arrow and the "New Welfare Economics", Economic Journal, Vol. 68, December, 1958, 834～835。Mishan 对此有评论，见第 136 页注①。实际上，Mishan 接受了 Davis 的观点，见 Arrow and the "New Welfare Economics": A Restatement，同上，Vol. 68, September, 1958, 595～597。由于一些很奇怪的编辑的原因，Mishan 给 Davis 的答复在 Davis 的解释之前就出现了。

② T. Scitovsky, A Note on Welfare Propositions in Economics, Review of Economic Studies, Vol. 9, November, 1941, 77～88；W. J. Baumol, Community Indifference，同上，Vol. 14, No. 1, 1946～1947, 44～48；本书第五章。

③ 见第 136 页注①。

得单独讨论。社会选择的悖论也不能轻易排除①。

8.4 无关备选对象的独立性和强度的个人间可比性

8.4.1 序数论、可观察性和无关备选对象的独立性

现代坚持主张序数效用的基本观点是对莱布尼兹(Leibniz)的不可辨等同原则的应用。只有可以观察到的差别才能用来作为解释的基础。在消费者的需求理论中,序数论的观点没有产生问题;而基数效用也并没能超越序数效用。

伯格森1938年的论文② 最大的贡献是将同样的原则用来分析社会福利。社会福利函数只依赖于无差异图形;换句话说,福利判断只以个人间可观察的行为为基础。

无关备选对象的独立性这个条件将可观察性这个要求推上了一个台阶。给定一个可以得到的备选对象集合,让社会从中作出选择,我们希望(理想地)可以观察到对可得备选对象的所有偏好,但无法去观察那些对社会无法实行的备选对象的偏好。

---

① Dahl也注意到,在许多问题中,表达对某个特殊问题的大多数人意见并不能由选举来解释,所以他说的"少数"规则是指少数服从多数的规则或多数服从少数的规则,见 A Preface to Democratic Theory, Chicago: The University of Chicago Press,1956,127~132。但是,重要的不是在每个问题中是否存在多数票,而是一类问题与另一类问题之间比较时是否存在多数票。

② A Reformulation...,318~320;也可以参阅 P. A. Samuelson, Foundations of Economic Analysis ,Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press,1947,228。

这个条件也许比所需的更强。在许多情形中，我们对不可实行的备选对象上的偏好有一些信息。所争论的是，一旦获得这些信息，就应该用于社会选择，这种可能性在下一节中作简短的评论。但很清楚，与无关备选对象独立的社会决策过程具有很强的操作优点。毕竟，已知的选举体制都满足这个条件。

值得注意的是，市场机制是与无关备选对象相独立的，这比书中所言更明显。如果我们改变那些社会不能实行的分配的个人效用函数，那么我们将不会改变竞争均衡。事实上，知识扩散化作为市场机制的优点，与在实现资源分配方面的无关备选对象间的效用比较是不相容的[1]。

下面我们总结一下吉尔博和伊纳达(Inada)的一些结论，用稍许不同的方法说明无关备选对象的独立性的基本含义。吉尔博[2] 认为社会福利函数以个人效用为基础，它在单调变换下都有意义，这在数学上称为泛函，它不是普通意义上的函数。也就是说，每一个社会选择必须依赖于所有的个人排序。伊纳达[3]的理论有些相似：如果社会福利函数是由个人排序决定的，那么对于个人商品分配间的社会边际替代率并不能由在那一点上的个人的边际替代率惟一决定；即使局部的社会选择也必须依赖于

---

① 由于市场机制满足对无关备选对象的独立性这个条件，它一定违背其他条件，即集体理性的条件(条件1或条件1')。这就是众所周知的团体无差异曲线相交的情形。Samuelson的社会无差异曲线满足集体理性这个条件(见P. A. Samuelson, Social Indifference Curves, Quarterly Journal of Economics, Vol. 70, February, 1956, 1～22)，但是它不满足对无关备选对象的独立性的条件；随着在社会生产可能性的每种变换，收入的再分配要求充分了解个人效用函数。

② 见第122页注①，第576～584页。

③ K. Inada, On the Economic Welfare Function, Technical Report No. 97, Contract Nonr～225(50) for the Office Naval Research, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University, Stanford, California, July 13, 1961。

个人偏好①。

8.4.2 纯粹伦理比较的不可能性

伯格森在他的两篇文章中认为个人间的比较很自然是属于纯伦理的。这是只有个人无差异图形（不是基数效用）才能用于形成福利判断的另一种说法。但在他的第二篇论文中，他的解释有一些问题②。他的观点非常接近于那种认为凭经验进行个人间比较是有意义的观点。他说："最终规则必须达到对不同人的不同排序能有一种完全可行的比较度量的程度……团体中每个成员都假设是以按需分配为伦理前提对社会状态排序。""不同排序的想法"或按需分配中的"需求"的意思似乎依赖于经验性的比较。但伯格森又改变了说法，他说："也许有必要用伦理前提来对所有家庭无差异曲线进行两两比较"。后来，尽管不必排除经验的个人间比较的存在性，他仍再一次强调纯粹的伦理比较对于形成社会福利判断是合适的："这个规则的实质是伦理。根据它不应该拒绝凭经验所作出的比较，但这意味着即使有这种假设也必须明白为什么规则受伦理的限制……如果能够利用经验可比性推行效用原则，那么即使没有伦理可比性，应该也可以这样做③。"

后一句话似乎应该倒过来。如果没有一种经验的方法来比较两个状态（即比较两个不同个人的无差异曲线），那么也没有

---

① 这个结论预先假定对所有满足拟凹和单调性的个人的效用函数都能定义一个社会福利函数。如果我们事先知道个人的效用函数纯粹是个人主义的（见第6章），而且属于某个非常严格的类别（如对某个商品有恒定的边际效用），那么社会福利函数可以根据社会边际替代率完全由在同一点上的个人边际替代率决定。

② On the Concept of Social Welfare，244～245。

③ 见第146页注②，第250～251页。

伦理的方法能区分它们。对于经验上可区别的现象，价值判断可以是相同的，但他们不能区别那些在经验上不能区别的状态。上面所指的两个无差异曲线的比较要求比较存在一些可以操作的意义（即使只是理想）。

8.4.3 个人间的可比性和推广的无差异图形

如果凭经验进行个人间比较必须是基于无差异图形的，如我们前面已经说过的，那它必将违背无关备选对象的独立性。假使我们能够断言个人 A 认为 x 优于 y 的程度比个人 B 认为 y 优于 x 的程度更强，那这种信息必须基于个人 A，B 对 x，y 两者间的比较，还必须基于他们对其他备选对象的比较。

事实上，所用的无差异图形应包含的维数比平常所考虑的更多。语言或其他表达方式可能也被加在经济学家对更一般的商品束的比较中。一个人无法避免地会受到如史蒂文（S. S. Stevens）[①] 所研究的心理学的影响，他问受试者一个给定的音调更接近于两个参考音调中的哪一个，由此来确定音调的基数尺度。这很明显类似于（说好一点，等同于）源自于帕累托的一种思想，一个商品向量到另一个商品向量的改变以序数比较为基础，它才能判断基数的效用[②]。

由经验意义上然后是伦理意义上进行个人间比较，显然是

① S. S. Stevens, The Psychophysics of Sensory Function, The American Scientist, Vol. 48, June, 1961, 226～253；特别见 231～233 页中关于 alternative scales 的讨论。书中所提到的方法是指由 Stevens 提出的 category scale；他所指的 magnitude scale 更是对经济学家对可观察行为的可能性的典型观点的打击。

② 关于这个观点最经典也是最好的表述是由 R. Frisch 给出的，见 Sur un problème d'économie pure, Norsk Matematisk Forenings Skrifter, Serie I, No. 16, 1926, 1～40。

这样进行的:(1)研究许多无关备选对象的个人偏好体系,事实上这已经大大超出了与个人选择相关的范围。(2)这一更广领域内的选择当然可以用效用函数来表示;尽管这些效用函数原则上在单调变换下是惟一的,事实上很自然会有一组可以定义基数效用的效用函数(如在解释风险时基数效用的使用)。(3)最后,效用差具有个人间的伦理含义,可以用来构建那些不能直接比较的效用差别在伦理上的个人间的差别。

前面所说的达尔(Dahl)[①] 给出一个简单的例子:投票和其他形式的政治活动可以看成是一种对偏好强度的个人间度量。当然,现假定投票本身是负效用。令 x,y 是两个备选社会状态,v 是投票活动。令(x,v)是社会状态 x 和投票活动 v 的组合。如果一个人认为(x,v)优于 y,那么他认为 x 优于 y 这种偏好必须至少大到足够填补投票这个负效用。我们在社会状态和投票活动的联合空间中可以找到一组效用指标。特别地,我们假设有一个使得社会状态和投票活动相独立的效用指标,即组合的效用是将两者的效用相加,那么认为(x,v)优于 y,是指:

$$U(x) - c(v) > U(y)$$

其中 U 是社会状态的效用;$c(v)$是投票的效用。这等于说:

$$U(x) - U(y) > c(v)$$

最后,如果我们在伦理上假设投票的负效用对于每个人都是相同的,那么对于所有给 x 投票的个人而言,x 与 y 之间的效用差可以假设为至少等于投票的负效用。反之亦然。

很不幸,这条链中许多环节是薄弱的。首先所有效用差是不相等的;我们知道对于给 x 投票的个人,他的效用差大于投票的负效用,但也可能大得多。因此,计算选票数并不能得到效用

---

① 见第 144 页注①,第 134~135 页。

和。这不是这个例子特有的问题;它是政治选择机制中固有的问题。

其次,投票的负效用每个人都是相同的,这种伦理假设并不是我们真正主张的,投票的负效用随着个人的财富、智力、健康的不同而不同。

第三,即使所有假设都是强的,不满足无关备选对象的独立性的问题仍会出现。如果真正举行投票,那么就会出现投票的负效用,且对于在 x 获选时,给 x 投票的个人可以部分排除这种负效用;而那些给 y 投票的失败者,除了要接受 x 还要接受投票的负效用。那么若 x 是通过投票获选的,很容易发生包括投票活动的整个过程的效用和会小于没有投票的 y 的效用和。

当然,按照这种逻辑,所有问题的最好解答是不经投票,直接指定 x。这其实就是使用无关备选对象作为偏好强度的度量的真实含义;这也就是为什么宁愿承受投票带来的负效应也要进行投票的原因,它不是为了承受损失,而是因为这种牺牲是一种强度的度量。这是如何实现的呢?

从根本上讲,我只能将这个难题留在这里。但下面两节中,将讨论基于推广的无差异图形的两种特别的个人间比较。

8.4.4 推广的认同[①]

在最古老的伦理著作中可以发现一种个人间的比较,它对政治和经济内容作了有意义的表述和规范。大概是在某个英国墓地碑文上可发现这样一个例子,这也许是相当特别的情形:

① 我要感谢 H. K. Zassenhaus,他提醒我这个思想对于福利判断的重要性。

马丁·英格尔布罗德安息于此,
上帝啊,怜悯一下我的灵魂吧,
就像我是上帝,你是英格尔布罗德时,
我会做的那样。

人们似乎在作这样类型的比较:状态 x 对我是否比状态 y 对你更好些(或更差些)[①]。这当然是实现适当的收入分配的一种方法。如果我比你富有,很容易就可以作出判断:增加一元钱对你比对我要好一些。

序数论者会问这样比较对每个人有什么意义呢?一种比较至少应该能够从备选活动中作出可信任的选择。这种受推广的认同感的个人间比较是可行的;判断也就是这种形式:我处在状态 x(按我的判断)比你处在状态 y 要好。

在这种形式中,比较中包含了个人特性。实际上,这些特性通常可以看成是构成个人财富的一部分。工具的持有权通常看成是社会状态的一部分;为什么使用这些工具的技能和这些技能背后的智力不能看成是社会状态的一部分呢?在互相赞赏彼此的幸福状态时,人们考虑的不仅是物质财产,也会发现自己"渴望这个人的见识,那个人的艺术品位"[②]。

这种推广认同原则作为个人比较基础,似乎是通常实践中所作的许多福利判断的基础。但很难看出,从这个原理中怎样去

① 这个思想更好的形式表述由我的同事 P. Suppes 给出,见 P. Suppes, Two Formal Models for Moral Principles, Technical Report No. 15, Office of Naval Research Contract Nonr 225(17), Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford University, Stanford, California, November 1,1957,17~18。

② 对于个人的属性类似于外部财产这个观点的道德含义的讨论,见 V. C. Walsh, Scarcity and Evil, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall,1961。我要感谢 R. A. Mundell,他给我提供了这个文献。

建立社会选择理论。

8.4.5 辨别的能力

个人间比较的一种流行的方法是：用能看到的效用差作为个人的有效单位①。古德曼(Goodman)和马克威茨对此作了最清楚的讨论。这里我们就采用他们的观点。他们认为每个人都能对备选对象作出明确的比较。因此，可以假设每个人只有有限的分辨等级。从一个等级变到另一个等级代表一个人能辨别的最小差别。古德曼和马克威茨作出了这样的基本伦理假设：从一个分辨等级到另一个分辨等级的改变，其意义对每个人都是相同的，与从哪个等级开始改变无关。

这个假设(连同其他更常见的条件：集体理性、帕累托原则、平等)的结论就是社会选择可以按照个人效用的总和来作出。其中，个人关于社会状态的效用是它现在所处的社会状态的等级以下的被辨别等级数。

这个过程存在这样两个问题：一个是辨别等级的实际意义，另一个是辨别等级作为个人间的度量在伦理上的合理性。关于前者，必须问：需要做什么样的试验能够使得任何人对每一个社会备选对象都能定义一个辨别等级？事实上，古德曼和马克威茨并没有给出一个很清晰的答案。他们将个人 i 对备选对象 j 的辨别等级 l_{ij} 与在一个固定的备选对象集合中，备选对象 j 的排

① 见 Borda 在 99 页中第一部分的讨论，F. Y. Edgeworth, Mathematical Psychics, London, C. Kegan and Paul, 1881, 7～8。W. E. Armstrong, Utility and the Theory of Welfare, Oxford Economics Papers, New Series, Vol. 3, October, 1951, 259～271；L. Goodman and H. Markowitz, 见第 125 页注①。For excellent analyses of Armstrong's and Goodman-Markowitz's views, 见 Rothenberg(见第 122 页注④), Chapter 7 and 8。

列位置 a_{ij} 区别开[①]。他们认为只有 a_{ij} 是可观察的，也是应该（或者能够）使用的。这种试验可以这样叙述：在所有逻辑上可能的社会状态中一定存在一个子集 S，那些似乎合理发生的每个环境（实际上是能够得到的社会状态的集合）都是 S 的子集。每个人画出他关于 S 的无差异图形，假设辨别等级是有限的，他可以将 S 分成有限个子集，每个子集中的每个元素对他来说都是无差异的，那么这些子集就可以定义一个等级数，这就作为它的效用值。

然而，这个等级数显然依赖于 S 的选取。例如，假设有一种新的商品开始销售，但它的价格高得无人敢问津。如果在 S 中加上包括这种新商品的商品分配，那么它就包含了比原来元素都好的新元素，和比原来元素都差的元素。社会状态这个向量中的增加分量增强了辨别能力。所以可以看到，S 的这种扩大产生了一个在两个老的辨别等级之间的新的辨别等级。那么原来备选对象的辨别等级 a_{ij} 将由于引入新的备选对象而改变，而在技术上，这个新的备选对象并不能得到。

当然，这种反对意见只是无关备选对象的独立性原则的另一种解释。

基于辨别等级的福利判断的伦理合理性可以根据下面这个例子来解释。社会福利的任何理论最根本的作用都是为收入分配提供准则。现假设只有一种商品（如收入）分给两个人，商品总数看成 1 个单位。令 x 是个人 1 得到的数量，$1-x$ 是个人 2 得到的数量。按照古德曼、马克威茨的方法，选取一个 x 使得 $U_1(x)+U_2(1-x)$ 达到最大。其中函数 U_i 分别表示两个人的辨别等级，也就是效用值。

① 见第 122 页注④，第 5～6 页。

每个人可以得到0到1个单位。但由于他的辨别等级有限，所以将这个区间分成有限段，在每一段中个人无法进一步辨别。假设个人1将区间分成m等分，每一段中他认为无差异。为了定义方便，假设每一部分包括它的下限，但不包括它的上限，1是只包含它自己的一段。个人效用函数为：

$$U_1(x) = [mx]$$

其中$[y]$是指小于等于y的最大的整数。类似地，个人2将区间0到1分成n等分，他的效用函数为

$$U_2(1-x) = [n(1-x)]$$

假设$n>m$，即个人2比个人1的辨别能力要好，那么古德曼—马克威茨规则就会得到这样一个不同寻常的结果：整个收入都给个人2才是最优的决策'。若假定$x>0$是最优点，那么$U_1(x)\geqslant 0$。如果$U_1(x)>0$，令：[①]

$$U_1(x) = r$$

那么：

$$mx \geqslant [mx] = U_1(x) = r$$

所以：

$$U_2(1-x) = [n(1-x)] \leqslant [n - r(n/m)]$$

因为$n>m$以及$r>0$

$$n - r(n/m) < n - r$$

又因为右边$n-r$也是个整数，所以：

$$U_2(1-x) \leqslant [n - r(n/m)] < n - r = n - U_1(x)$$

或

$$U_1(x) + U_2(1-x) < n$$

① 下面用反证法证明这一点。——译者注

另一方面,如果 $x=0, 1-x=1$,我们有:

$$U_1(0)+U_2(1)=[0]+[n]=n>U_1(x)+U_2(1-x)$$

这与若 $U(x)>0$ 时,$x>0$ 是最优点的假设相矛盾。如果 $x>0$,但 $U(x)=0$。注意到:

$$U_1(x)+U_2(1-x)=0+[n(1-x)]<n$$
$$=U_1(0)+U_2(1)$$

所以同样产生矛盾[①][*]。

因此在敏感程度上的一点差别就导致了完全的不平等。这在伦理上是不合理的[②]。

---

① 这个结论非常接近于 von Neumann 和 Morgensten 关于离散型的博弈论的讨论:那些辨别能力很低的人会受到歧视,见 Theory of Games and Economic Behavior, second edition, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1947, 614~616。

* 因而最优点是 $x=0$。——译者注。

② 由于隐藏了经验的成分,类似于上面的例子比它们应有的更有说服力。如果事实上我们从来没有遇到过上面所提到的两个人的情形,那么对于完全不平等的收入分配,我们的直观的拒绝意见是不正确的;我们的直觉是由我们所遇到过的情形决定的,如果我们面对这样两个人,其中一个比另一个更敏感,不管他们的收入水平如何,我们应该接受 Goodman-Markowitz 的做法。Goodman 和 Markowitz 曾经和我谈过,事实上较低的收入水平上的辨别等级会更接近(这是收入的边际效用递减的一种解释);除了不平等以外,效用之和会在某一点达到最大。由于在现实情形中 Goodman-Markowitz 福利函数不会导致很大的荒谬,我们就不采用书中的例子作为证明。实际上,构造一个类似于书中的例子并不难,但是在较低的收入水平下,辨别能力的增加就可以消除完全的不平等,不过虽然如此,辨别等级数目上的适度的差别也会导致相当大的收入不平等。

8.5 集体理性

福利判断应采用序关系的形式，这个条件比其他条件所引起的争议要少些，尽管 Buchanan（见 8.3.3 小节）认为，理性只是针对个人的一个性质，没有理由认为社会也应该是理性的。也有一些不是很重要的观点（如肯普[①] 提出的）认为，如果社会决策过程必须满足其他条件，则它可以是不传递的。

刻画序关系的两个性质是连通性和传递性（见 3.2 节）。连通性，一旦对其有所理解，就不会拒绝它；它只是要求在任何环境中都必须作出选择。不存在放弃决策（弃权）这种情形；一定有某个社会状态被选中。

但是，不能否认（尽管不太精确）放弃决策也有其重要性。在任何历史上的给定情形中，存在一个在社会选择中一直受偏好的社会状态，如果没有相反的特定的决策，该社会状态就被接受。从政治上看，这太明显了，而且常常如此，当前的状态就有这个性质。如果是考虑商品的整个分配，这种受偏好的备选对象会稍有不同。假设当环境为 S 时，选择社会状态 x。现在假设进行革新，那么环境将增大。在基本上是自由企业的经济中，存在一种受财产法和体制运作控制的变动。为了区别于 x，我们将所得的状态记为 x^1。这个状态 x^1 很自然就会优于 x，除非有一种特别的法定决策来改变它。

人们没有完全意识到，这里存在着一些根本的分歧，即社会

① 见第 136 页注①，242～243。

选择是否受历史的限制，或等价于说，不行动是否也是一种有别于其他备选对象的一个备选对象①。社会福利函数方法（不管伯格森的观点还是我的观点）以及“大众民主”（达尔② 所称），两者都暗示，在任何时刻社会选择都由那些能得到的备选社会状态的范围所决定（个人偏好已经给定）；没有一个备选对象，由于它与历史上给定的备选对象相一致或由它得来，而使得它的地位相对特殊。在对两个备选对象进行选择的情形中，这个观点趋向于采用少数服从多数的决策③。

另一方面，在下面这段引文④ 中，布坎南和塔洛克将保留现有状态和改变现有状态区分得很清楚：“我们必须严格区分这两种决策：①授权社会团体活动；②反对另一团体提出的反对意见。如果一个团体被授权对整个社会的积极性活动作出决策，那么这个团体能够有效地‘统治’这个决策。这并不是说否决权也能有效地‘统治’……当我们称‘少数服从多数原则’或‘多数服从少数原则’时，阻止活动的权力并不是我们通常的意思或应该具有的意思。”行动和不行动之间的这种不对称性与他们所支持

---

① 最为极端的相反意见可以在 A. Downs 和 G. Tullock 的争论中发现，见 A. Downs, In Defense of Majority Voting, Journal of Political Economy, Vol. 69, April, 1961, 192～199; G. Tullock, Reply to a Traditionalist, 同上, 200～203。

② Dahl，见第 144 页注①，第二章，特别是第 41 页。

③ 由于历史的原因优先考虑某个备选对象会去除中立性条件（见 8.2.3 小节），因此按照 May 的观点，如果他的其他条件（较少引起争论的）可以接受的话，那么就可以得到少数服从多数的规则。但是，在一些特殊的情形中，仍有理由拒绝中立性条件，所以仍然可以得到这个有效的少数服从多数的规则。

④ 见第 136 页注①，第 258～259 页。

的一致性(他们认为是选择的理想准则)联系紧密[①]。在这个规则下,现有的状态就是具有相当特权的备选对象。

基于这个背景,传递性这个条件的重要性也就很清楚了。熟悉消费者需求理论[②]中完整性争论的人将会看到,基本的问题是相同的:最终的选择与实现方法是相互独立的。传递性就保证了这种独立性;从任何环境中,一定会选出一个备选对象,而且除非出现僵局,否则历史上所给定的备选对象不会被不负责任地选中。

作为已经看到的事实,无传递性的社会选择会产生一些显然令人不满意的决策,这已经由里克[③]、达尔[④]采用不同的方法说明了。里克强调的是可能会有法定规则选择被多数人反对的建议。达尔更倾向于这些规则会导致僵局这种可能,所以也就导致了一种为社会所不希望的不采取行动的可能。那些并不是由

① 缺少决策的成本;在他们的理论中,只有这些成本能够解释对较少一致性的决策的认同。

② 见33页注①。自从书已经写好之后,还有几篇很重要的论文需要在这里提及:H. Houthakker, Revealed Preference and the Utility Function, Economica, New Series, Vol. 17, May, 1950, 159~174; H. Uzawa, Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption, Chapter 9 in K. J. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes (eds.), Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959, Stanford, California, Stanford University Press, 1960. Ville 的论文由 P. K. Newman 翻译为 The Existence-Conditions of a Total Utility Function, Review of Economic Studies, Vol. 19, No. 2, 1951~1952, 123~128. P. A. Samuelson 对此作了非常精妙的历史回顾,见 The Problem of Integrability in Utility Theory, Economica, Vol. 17, November, 1950, 355~385。

③ W. H. Ricker, The Paradox of Voting and Congressional Rules for Voting on Amendments, American Political Science Review, Vol. 52, June, 1958, 349~366。

④ 见第144页注①,第39~41页。

于不希望而不行动，而是缺乏一致采取正确行动的能力所引起的行动的失败，被称为“民主瘫痪”。民主瘫痪的这个观念对我来说似乎值得作进一步经验性研究，如同进行理性研究一样。

因此，在社会选择机制中的集体理性不是从个人到社会的不合理的移植，而是能够完全适应环境改变的真实的民主体制的一个重要属性。

社会抉择与多准则决策

肯尼思·约瑟夫·阿罗　　著
哈维·拉瑙特



引　　论

对于一个有限的备择对象系列，按多种准则来排序，运筹学目前所用的方法通常还缺乏一个坚实的(数学)基础。本书想从社会选择理论的教材中导出多准则模型可行的基础，它对在工业中经常遇到的一类决策将是有效的。

考虑大量的备择对象和大量的准则，这里的“大量”是指比如说大于四、小于五百这样的量。假定每种准则都按弱序将备择对象从最好到最差依次排好，我们的决策问题是就如何把这些准则合理地综合成不是无意义的、明显的弱序，将备择对象从最好到最差依次排出。这个问题我们称为工业的更序*问题。

自从阿罗(Arrow)的不可能定理(1951)和布莱克(Black)综合的书(1958)出版以来，人们对团体决策的分析和理性化做了许多工作。在社会选择理论和团体决策技术方面，已有了无可争议的进展：策略性投票，[例如，见吉巴尔德(Gibbard，1973)和萨特思韦蒂(Satterthwaite，1975)]和工具法[例如，见法恩(Fine)和法恩，1974)]。在多准则运筹学领域内却较少有一致的意见。后者的重点是建立一个收集大量多准则决策的方法库，而不是

* 这个称呼在以后作者有说明。——译者注

判断它们之中谁是最优的。像伯纳特(G. Bernard)和别逊(M. L. Besson)写的论文(1971)"多准则决策的十二种方法"，就显示出巨大的创新才能。然而，如要判断哪一个比其他的更有意义，确实是困难的。

在初创时，这类方法中一个著名的例子是依莱克托(Electre)方法[见萨斯曼(Susmann)等(1967)或见附录1]。十多年来，至少在法国，许多有见识的管理人员都认为依莱克托方法是处理多准则难题的方法，尽管它并不满足所有相容的、令人信服的公理系统。

我们认为，专业决策者应该清楚，特别是在多准则分析中，他有可能成为自己希望避免的一系列人为偏见的牺牲品。尤其是，他应该希望能有比一个方法库更好一些的某一类东西——一种至少有一点可靠基础的实在方法。在处理实际问题中，很明显，方法库看来更灵活生动、更直觉，在某些特定条件下会比任何基本的数学模型处理得更好些。然而当出于安全性考虑应用方法库时，决策者应避免只用一种方法，因为如果这种方法可应用的范围太广，那就将无法克服决策者个人的偏爱，或过分人为地僵化，以致它会难以应用。

无论如何，从依莱克托方法的成功中可以提出几个不容争辩的结论：

(1) 决策者喜欢的是依莱克托法描述理想行为的方式，它在一定程度上把在少量数据处理中使用的有心理价值的技术扩展到了具有大量准则和备选项的环境中。

(2) 决策者对自己能够理解这个方法的准则感到非常满意。

(3) 由于带有许多任意参数，依莱克托方法是一个具有很多功能的方法，它并不抹杀决策者在决策过程中的职责。

这三条强调了任何一个有效方法应有的特性。

我们在工业更序问题上做研究的动力来源很简单：

一方面，把一组已经按有限个定性准则排好序的对象再排出名次归为一个合理数目的有限类（通常都是如此），这已成为我们每日的负担，使人不得不动用许多经验的方法。还有，人们赞同依克路特（Eckenrode，1965）作出的结论，也是约翰逊（Johnsen，1968）所指出的：数据越有序化，结论就越有一致性。

另一方面，对于多准则决策的基础，社会选择几乎是惟一有理论的方法。在这个领域中面临的决策是将已按有限个准则排好序的有限个对象再给以排序。

这两个原因说明了为什么我们只限于纯粹有序的情形和我们的研究方法；通过推广和解释社会选择理论的现有政策，我们建立了本书呈现的主要结论。

第一结论指出，将受控多数方法用于我们的情况时，要放宽一些条件使它有效，并非代数的条件，而是对工业更序问题解释性的条件。第二项结论指明了受控多数方法适用的情况，统计角度上说，它是渐近空集，换句话说，这些条件在实际中能遇到的只是非常少数的案例。第三个结论是针对工业更序问题建立一个非矛盾的公理系统[具有普遍性的孔多塞（Condorcet）条件的系统]。第四项结论是检验一些具体的方法是否满足这个公理系统并研究它们的某些性质。

这些引导出了本书的一个纲要：第一部分是一些最简单的、经典的心理过程和心理学结论，这将在以后有助于我们就序化过程建立模型，这个模型符合矛盾准则和不可比准则。更令人满意的公理系统会直接导出不能接受的悖论，这个事实将在第一部分得到解释。受控多数方法将占有整个第二部分，尽管它具有局限性，有效范围受制约，但有重要的历史价值。还将证明在解

决我们工业更序问题时,它确实在理论上只有有限的意义。第三部分,也是最后的部分,将集中在新的公理系统,它给出的实际技术能很好地解决工业决策问题。

根据我们同美国海军研究办公室的 ONR-N00014-79-C-0685 号合同,这本书的研讨和写作是在斯坦福大学社会科学部数学研究所的有效性研究中心进行的。我们感谢所有支持我们的机构。

第 I 部分



1 问　　题

本章附了一个杂录，从我们讨论的主题来看，它确实可以删去，因为它是纯数学问题。但它却勾画出多准则排序过程的类型，这正是贯穿全书的逻辑线。对一个工业决策的咨询人员来说，这显然是每天都会遇到的问题。

咨询问题经常涉及到排序方法，方法可以清晰地分为两步：

(1) 识别，这一步是选择有关的备择项目、确定相关的准则——两项非常粗略的工作。

(2) 操作，这一步是选取归并的方法(选取过程通常总缩小到只有首选的方法才被接受)，并将这种方法用于数据。这一步还包括几乎在任何情况下都使用的一种加权的受控多数方法*。

通过对这些步骤的描述，本书就能够使决策专家的要求明确了。

* 受控多数是指由多数决定。——译者注

1.1 识别

1.1.1 相关备择项目的选择是一项粗略的工作

通常,当一个决策者在作出决定时,他是把一些备选对象与它们的假想竞争者作比较加以识别的。这个集合似乎是很受限制的(例如,从少数候选人中选出一个最好的,或从少量的建议中选出一个最佳策略)。此外,这个集合的界限不能清晰地固定下来:决策者还需考虑到新来的候选人,或由最新信息提供的新的策略组合。

只有少量备选项是一种例外情况;大量而有限的可能状况集合才是我们的研究对象。通常用连续系统来表示备选项的扩展集合。我们的办法是由决策者来识别选取(决策者也就是大量而有限的集合形成的规则);而我们还想得到能避免结论不稳定风险的方法,这种不稳定是由于引入或删去一个实际上没有参与竞争的对象而造成的。换句话说,若按这些方法,则只有出现杰出的新的备选项时,最佳成员的名次才会受影响。

1.1.2 准则的选择也是非常粗略的

决策者还要识别哪些准则是与决策有关的。

区分两类准则:

(1) 属性的,它是使对象便于比较识别的内容,但仅与备选项的期望产出有关;

(2) 目标的,它是与所想要的结果直接相关的内容,但所得的估计一般说来是模糊的。

考虑一个具体的例子,商业公司要作新产品的研究方案选

择，期望结果是一个非常有利可图的方案。与此期望结果相关，“有一个快的投资回报”可能是首要的经济目标。“研究室的领导认为，这个方案是众多方案中最可行的”这个叙述仅仅是一个属性准则。但因为它的评估比财务目标的评估精确得多，所以这个属性可能更为重要。

在工业的多准则问题中，我们碰到的主要是多属性问题。从这种意义上来说，一个备择对象的期望收益通常能被看做是一种属性，比如此时的期望收益是使公司的生产更安全均衡。这些属性很容易从决策者那里获得，其数量可能会很大。例如，邓克尔(Duncker，1903)已引用了与以下几点有关的属性：

- 市场知名度；
- 创新水平；
- 生产能力；
- 物、财资源；
- 获利能力；
- 管理者的管理水平与开拓能力；
- 公共责任。

M. A. R. S. A. N. 方法列出了多达 49 种可能有效的属性，且已作了分析[萨斯曼(Susmann 等，1967)]。

在为一个国际商业公司的多元化方案的选择建立一个新模型时，该公司的上层决策委员会向我们中的一人建议，对他们的这个特殊情况，强独立的准则不得少于 25 个。

1.2 归并方法

在准则具有序型偏好的结构下，换言之，直觉上，准则是定

量的,但它通常能表示为半序,而并不损失任何信息。例如,考虑一个方案所需要的投资规模。对许多公司而言,重要的不是投资的数量值,而是投资的"精确"规模。一般地,五至七个等价类就足以精确描述投资规模。

归并这个名字源于这个事实,即使用这个方法所得的结果近似地是一个具有合理数目等价类的半序,这个问题在工业上的频繁性是容易理解的。让我们为一个特殊的商业公司考虑一系列方案,一个真正的决定将实现其中的某些方案。在实现过程中,有一些方案应很快能被证明是不可行的,有一些方案将需要修正,有一些方案可能会突然走向反面成为废话。对一个工业方案的有效认识具有高度不确定性,一个决策者的最好工具是经独立判断所得的众多方案的优先次序;这样,若一个方案不得不被放弃,或若这个方案所需的预算被扩大了,那么按"归并后的"次序,紧接其后的新方案将会被首先采用。

1.2.1 归并方法的选择

当一个人承担着多准则归并这种复杂工作时,他脑海里有的还只是一种猜想。事实上,即使对非常简单的决策,我们也还远不能提出这种现象的真实模型。作为这种观点的一个佐证,我们只需要回忆一下尤加尔(Ungar,1973)关于老鼠逃避黑暗的实验。通过一个学习过程训练老鼠作出逃避黑暗而喜欢光明的决定,这个训练过程使受训老鼠的大脑合成一种叫 SCOPTOPHOBIN 的特殊多缩氨酸,这一明显与逃避黑暗有关的物质也存在于没有受过训练的老鼠大脑里。这种物质的生成是经历了一个非常复杂的机理,我们甚至还不能设想它。于是我们只能通过观察非常肤浅的、但无可争辩的事实,勉强对大脑里发生的事情构建一个现象学的模型。

例如，我们知道一个决策者总是尽量凭知识和先进经验来作出决策。对一个重要的决策，他希望能对大脑中有关这个主题的所有信息进行加工。这当然是不可能的，记忆的结构可以解释这种不可能性。100年以前[艾宾豪斯(Ebbinghaus,1885)]，人们已经知道，人的大脑有一个短期记忆现象，允许有限条供处理的信息存留非常有限的时间。即使我们能证明训练这个记忆会有效地增加这种能力，它的潜能仍是相当有限的(因为每天的经历肯定了这一点)。

相反地，人的长期记忆存贮了一生中如此众多的信息，以至于它的巨大潜能会被认为是无限的。可是，如果要重新找到这些资料并给以加工，这就要通过一个联想的直线链，这种重新寻找的过程将会是相当长，甚至是痛苦的。例如，要回忆起已被遗忘的一个生日！这个同样的过程被一些作者无意识地当做直觉来描述，似乎这已足够了。但大家知道，直觉是不可靠的，我们会感到把责任留给一个完全无法控制的加工过程，会使之产生许多错误和偏见，这种危险的决策是不合适的。

我们不得不承认，一个正常的大脑不是专为了作复杂的多准则决策而构造的：信息量太大，以至于不可能根据短期记忆作同步处理，而且也没有明显肯定的方法能作累进处理。这是许多决策者需要帮助的典型问题：他们估计到自己不能同时考虑所有的备择对象和所有想要的准则，来作出他们正想作的决定。

可是，他们经常有这种感觉，有时几乎就是直觉，应用少量准则于少量备择对象，就能有效地作出决策。基于个人的经验，我们认为，四个准则和较多的备择对象，估计是人类能处理的复杂体的极限。

只要决策者能解释清楚自己处理少量数据情况的方法过程，那么，对于帮助决策的科学家来说，工作就简单了。由此可以

推测，不能解决更大问题的原因很大程度上是由于短期记忆的限制。

决策者几乎不可能提出一些他实际上使用的、不矛盾的公理系统；他更愿意的是表达他想遵从的公理；就像在下一章中会见到的那样，给出的假设越有吸引力，相应的公理系统似乎越不可行。

1.2.2 加权受控多数的陷阱

出人意料的是，这个方法库的一部分具有相当好的思想，在决策者中很流行，这值得描述一下。经常地，在按所有准则评估了备择对象后，决策者认识到他的问题并未简化。有点失望的是，这个决策者感到希望将来自于准则的“权重”。于是他自信地建立了下面危险的模型：他考虑一个团体，W_i 就是第 i 准则的整数权重，W_i 表示团体中有 W_i 个成员赞同准则 i，然后再应用这种遵从多数的决策方法。

为了使这个模型现实化，我们认为，这些成员不该像委员会委员一样行动，例如，他们不应策略性地运作（一种并不精明的技巧性准则）。除此之外，决策者所用的决策模型与团体决策所用的方法一致，即他们首选这种加权受控多数方法。以后会明白，这几乎总是行不通的。于是，他们不得不使用很流行的方法，如已被认为是只适用于委员会决策的、又似乎是不合适的博尔达(Borda)法。由于多种原因，他们通过这个方法获得的结果表明，即使适合于委员会决策的方法，通常也不便于解决工业的多准则决策。结果是，当缺少一种便利的方法时，决策者喜欢等一等，等到最后一刻再作出排序决定。这种态度能让他多少有意识地从附加信息中得到好处，而这些附加信息会合理地影响选择且使之更容易；这种态度还会造成一种紧张局势，这会使某一留

存原则相比其他原则显现出压倒性的作用，这也会使决策者获益。当然，这种态度不解决问题，但我们倾向于相信这种全面细致的“权重”会起到一些作用。

权重能看做是一种直接尺度，用它来反映一个学习过程的强度：通常与过去的成功或失败有关的一个准则自然会得到一个更高的“权”。我们知道，没有实验支持这个事实，但它与尤加尔的试验是相符合的：一种特殊的多缩氨酸存在于受过一种特殊训练的老鼠大脑中，且这种多缩氨酸被注入未受过特殊训练的老鼠体内后，按相应准则的附加权，能促使它学习这种行为。

我们必定认为(这是被我们的经验所肯定的)决策者给出的权重在不同日子里甚至在不同的钟点里，总易有相当大的波动！但他们坚持要给出权数这个事实或许意味着任何严格的方法都将不得不炮制一个不稳定的权数体系。换言之，方法对权数体系的变化不应太敏感。实践经验表明(这至少是很有可能的)，一个非常严格的、被认可的权数体系通常足以满足决策者迫切要求的精确性。

总之，我们不得不认识到，在工业的许多问题里，决策不得不从权数体系不固定的多个准则和范围不界定的备择对象这样的资料环境中产生。决策者需要一些方法将备择对象从最好到最坏排序，以便在有限的预算内挑选出最好的备择对象。许多关于工业决策的、不敢涉足危险领域的著作，坚持只需对备择对象集作分析和按准则对备择对象排序，而没有提到任何归并方法。他们声言一个好分析将自然而然地显现出一种好的解决方法。

相反地，我们认为，如果这种处理方法很容易显现出来，那么决策者就不需要决策专家的创见，而本书倾向于显示，一种有效的归并模型的选择必须取决于内外因素，包括资料的属性和决策的内容。

我们希望本书将有助于决策专家弄清楚上面引述的这种加权受控多数方法的适用范围，并且将为消除这种加权受控多数方法的弱点提出一些带有公理裁决的方法，为工业选择这类特殊问题服务。

2 悖　论

能用于决策的思路似乎并不是惟一的。众所周知，每个人的思维一般来说并不总是十分合乎逻辑的，文化氛围或一些特殊技能也会改变他们的决策行为。尽管如此，我们不得不承认，对特定的决策，特定的思维将使用一种特殊的方法。

若资料太多，超过了大脑的处理能力，或者方法是不适当的，或者问题没有真正的解（这可能意味着备择对象被过分限制了），那么这个决策过程将会失败。

我们前面已经说过，运筹学中一些模型的目标应该只限于改善（在必要时）一个实际决策者自然产生的、但不成功的方法。可是，决策者通常不能解释他的大脑所做的或应该做的，在被问及他的多准则决策方法时，他会描述一些他试图遵从的公理来作为回答。当然，如果数学家不得不服从一些公理并从中能导出一系列相应的具有相容性的方法，这或许是理想的。但直接应用这种方法比人们想像的要差很多。以下，我们要指出两种更为自然的方法是怎样导致一种完全的或至少是实质上的失败。

记住，我们考虑的范围是有限的，就决策问题而言，仅限于那些准则和备择对象的数目都有限的实例。每个准则都由备择对象的线性排序组成。我们用 X 来表示备择对象的集合，$\Omega=$

$\{\theta_1,\cdots,\theta_N\}$表示准则的索引集合,$E(X)$表示一个扼要描述$\{\theta_1(X),\cdots,\theta_N(X)\}$,称为一个侧面。对$\forall\ Y\subset X$,$E(Y)$表示将$\theta_i$限定用于$Y$中元素所得的序列$\theta_1(Y),\cdots,\theta_N(Y)$。

2.1 阿罗公理系统

因为阿罗(Arrow)定理的全面讨论不属于本书的范畴,所以我们仅使用该结论的一个受约束的但非常简单的形式:准则被看成对备择对象的总体排序。还有,准则和备择对象都是有限集合且都含有两个以上元素。设想我们寻求一种方法D,能为每一侧面给出备择对象的总排序,这个总排序是能令人满意的,称得上多准则排序。我们就称D是一个多准则决策函数。

公理 2.1(无限定域) 准则不受限制,决策函数D尊重全体一致的意见,这样,该准则和决策函数D的取值是不受限制的。

公理 2.2(不相关备择对象的独立性) 设D表示多准则决策函数,X表示备择对象的集合,$\theta_1,\cdots,\theta_N$表示准则的序列,那么,$\forall\ Y\subset X, D[E(X)](Y)=D(E(Y))$。

换句话说,将多准则决策只限于Y中这些对象所得的结论,也就是将各个准则只用于Y后再用这个决策所得的结论。

这意味着,在应用这种方法时,如果你忘了一些(没有排好序的)备择对象,这对决策是无足轻重的:我们从第一章中已经知道,备择对象的全集往往是很大的,而只有一个相对小的子集

能被识别。这样,如果被遗忘的备择对象重新得到考虑,应用这种方法所得的结果本身必然不会因此产生变化。

公理 2.3(正响应或主动响应) 考虑一对备择对象$\{x,y\}$,$D[E(X)]$规定 x 排在 y 之前。

令 A 是在侧面 E 上将 x 排在 y 之前的全部准则组成的集合。

如果 E' 是另一侧面,且在侧面 E' 上集合 A 中的准则仍将 x 排在 y 之前,那么 $D[E'(X)]$仍应将 x 排在 y 之前。

当然,以这种形式书写的公理包含了公理 2.2,但在解释性方面,分离出公理 2.3 是有意义的,它以一种较弱,但更精确的形式说明,准则关于一些备择对象优于另一些备择对象的判断作得越多,这个准则在决策中的价值越有可能被发现。

现考虑两个对象,比如说 x,y,再有一个准则集合 G_D^{xy},使得:当 G_D^{xy} 中的每个准则就一个特定侧面 E 能无异议地将 x 排在 y 之前时,那么$(D(E))(\{x,y\})=(x,y)$。

换言之,G_D^{xy} 是这样的一个准则集合,在应用 D 时,这个集合中的准则将 x 排在 y 前的一致性保证了这样一个事实,即在多准则决策的排序中 x 会在 y 前。

任何这样的集合被称为对$\{x,y\}$是决定性的。这样的集合往往是存在的(例如,按公理 2.1,对任何备择对象$\{x,y\}$,准则的一致性就是一个决定性的集合)。

考虑任何使得在 $D[E(X)]$里 x 在 y 之前的侧面 $E(X)$。在这个侧面 $E(X)$里,使 x 排在 y 之前的所有准则的集合对$\{x,y\}$是一个决定性的集合。这是公理 2.3 的一个直接应用。

我们现在能对阿罗的结论进行证明了。

引理 2.1 任何$|G_D^{xy}|\geqslant 2$的集合 G_D^{xy} 都含有一个更小的决定性集合*。

证明:考虑一个侧面 E,使得 G_D^{xy} 中的准则被分成两个非空的集合 G' 和 G''。接着考虑第三个备择对象 z,将侧面 E 限制在集合$\{x,y,z\}$上。CS 表示集合 S 的补集。假定 G' 将备择对象排序为 z,x,y;G''将备择对象排序为 x,y,z;CG_D^{xy} 将备择对象排序为 y,z,x。在 $D(E(\{x,y,z\}))$里,x 必会在 y 前,但 z 可能是剩下的三个次序中的任一个。然而:

(1) 若 $D(E(\{x,y,z\}))=(z,x,y)$,那么,G' 中的准则是惟一使得 z 排在 y 前的准则,就有 $G'=G_D^{zy}$。

(2) 若 $D(E(\{x,y,z\}))=(x,y,z)$,那么,G''中的准则是惟一使得 x 排在 z 前的准则,就有 $G''=G_D^{xz}$。

(3) 若 $D(E(\{x,y,z\}))=(x,z,y)$,那么,如有在(1)和(2)中的同样理由,就有 $G'=G_D^{zy}$ 和 $G''=G_D^{xz}$。

引理 2.2 对任何(w,z),恒有 $G_D^{xy}=G_D^{wz}$。

证明:考虑侧面 E_1,在这个侧面 E_1 上,G(等于 G_D^{xy})中的所有准则将备择对象排序为 w,x,y,CG 中的所有准则将备择对象排序为 y,w,x。由于 G 将 x 排在 y 前,所以 $D(E_1)$将 x 排在 y 前。$D(E_1)$将 w 排在 x 前,由一致性决定(公理 2.1)。

那么,$D(E_1)=(w,x,y)$,这意味着 w 在 y 前。因为只有 G

---

* 集合 A 相应的$|A|$表示 A 中元素的个数,因此$|G_D^{xy}|\geqslant 2$ 表示 G_D^{xy} 中至少有两个准则。——译者注

中的准则将 w 排在 y 前，所以 $G=G_D^{wy}$。

考虑另一侧面 E_2，在这个侧面上，G（这里等于 G_D^{wy}）中的所有准则将备择对象排序为 w,y,z，而 CG 中的所有准则将备择对象排序为 y,z,w。同理，有 $G=G_D^{wz}$。现在，这个结论当然立即得出来了。

从引理 2.1 的递归性应用中可知，存在一个只包含一个准则的决定性的集合，从引理 2.2 可知，这个集合对任何一对备择对象及其排序都是决定性的。换言之，决策函数等同于这个独特准则的排序。

定理 2.1 满足公理 2.1、公理 2.2、和公理 2.3 的一个多准则决策函数必定严格与其中的一个准则相同。

你本想作一个真正的、精明的多准则决策，但最简单的、最自然的公理会驱使你作一个单准则的决策。

在政治学里，阿罗的公理系统被认为对民主是必要的（在这里，选民是准则），悖论在于该公理系统会导致专政。

在我们的上下文里，这个结论暗示一个特殊准则会压倒其他准则的影响。或许准则集合幸运地包含了能有效结合其他“专政”的一个“专政”，于是，在众多的可能的“专政”中，至少这个“专政”是可以接受的。

所有这些实际上意味着什么呢？让我们来看一下在一个真实的、理想化的决策者大脑里所可能发生的和可能不发生的情况。

如我们早先讨论的，决策者在不同的阶段会使用不同的方法。某些删除性的步骤可能会被采用，并确保留下的备择对象的

所有特性能满足最起码的要求。留下的这些就是可接受的候选对象。

思维将用各种有意识的方法继续对候选者进行排序。由于生物学的原因,我们假定大脑是不可能使用复杂的、全盘计算的方法的。结果是,一种实用性准则的“专政”在大脑里出现,只因为这种实用性几乎不需要计算。

早先我们实际上已假定,在我们处理的决策问题类型中,在任何情况下建立一个有效的数值模型所需花费的时间,都足以使这些方法在使用以前就会被放弃。

“权数体系”在有关多准则的文章里都非常流行,这是因为类似于权重衡量的问题可能经常出现。“这些应用”或者被描述为一种线性函数的近似计算,或者在非定量问题中被描述成是成对比较的归并,这种比较是从一些不固定的准则中权衡得来的。事实上,当大脑不能轻易找到能明显综合各种准则的一个准则时,它就会决定根据不同准则分别作出相应的分析(涉及以前的不同情况,这些情况能引入许多无关的项目),并随之开始迷惑不定。为什么会如此不清晰呢?

(1) 因为大脑不能把注意力集中在许多项目上,而且这些项目本身又是按许多准则排序的。

(2) 因为大脑可能不能按所有可能的准则对备选项作精确的排序。

(3) 因为对一个很长系列的备择对象进行排序时,有关准则的集合能被突然改变:例如,若前 50 个备择对象与某个准则集合有关,而一个新的准则要从第 51 个备择对象开始与之有关,那么,大脑或许会坚持对 50 个备择对象已经“生效的”准则,且这仅仅是因为已经运作了 50 次[邓克尔(Duncker,1903)]。

这样,在一个非常不确定的背景上,大脑不得不建立一种决

策方法。记住,大脑不能做太多的事,因为它处理问题的大多数复杂智能受一个局部的、非常小的记忆区域的限制。这能解释为什么某些仅坚持一种思想或一种准则的“简单的”头脑能取得成功,而且仅能在相同的、一贯的方向上作出决定。当然,这不太可能会是最好的解答,事实上是许多反例驱使运筹学远离这样的解答,如一个最大化的利润,也不能消除罢工的风险。

2.2 梅公理系统

自从姆奎斯(Marquis)的攻击型理论产生以来(1785),对应于独裁的民主观点是将简单多数规则作为一味万能灵药。在用这种方法进行决策时,当且仅当多数准则将 a 排在 b 之前时,备择对象 a 才会被排在备择对象 b 前。

虽然这种方法被普遍采用,但直到 1952 年,它才被一个公理系统刻画出特征;从决策的观点来看,这个公理系统是有意义的。关于这个公理系统的详细讨论在梅(May)的著述(1952)中可以找到。在这里我们作一简单回顾。

假设决策对象的集合仅限于两个备择对象,表示为 x 和 y。每个选民可以投 $+1$(这意味着 x 在 y 前)、-1 或 0(这意味着没有差别)。这个决策可以是 $+1$、-1 或 0。

这些公理是:

(1) 决策规则是好的,且对每一种情况都有定义。

(2) 决策规则是对称的(即对各个体与备择对象是一视同仁的)。这个条件可以用两个子条件来表示:(a) 决策仅取决于对 $+1$、-1 和 0 的投票数目;(b) 若 d_i 表示第 i 选民的投票,$f(d_1,\cdots,d_N)$ 表示决策的值,那么,$f(-d_1,\cdots,-d_N)=$

$-f(d_1,\cdots,d_N)$。

(3) 决策具有正响应的特性:假设 $f(d_1,\cdots,d_N)\geqslant 0$,若对所有的选民 i,$d_i'\geqslant d_i$,且至少有一选民 i_0,使 $d_{i_0}'>d_{i_0}$,那么 $f(d_1',\cdots,d_N')=1$。

下面是这些公理的基本结论。

定理 2.2 满足梅公理系统的决策规则是惟一的:简单多数的决策规则。

证明:定义一侧面,作为对单一简单问题的个体投票的一个指示性集合。考虑侧面$(d_1,\cdots,d_N)$,使得在这个侧面上投+1的人数等于投−1的人数,即:

$$f(d_1,\cdots,d_N)=f(-d_1,\cdots,-d_N)=-f(d_1,\cdots,d_N)=0$$

任何偏好+1的额外投票会将决策函数 f 改变为(比较公理2.3)+1状态。

因为侧面的对称性,很显然,任何偏好−1的额外投票将使决策偏向于状态−1。这样,这个定理得到了证明。

到此,这种受控多数方法符合了我们所希望的归并方法应有的完善框架。这本身可能是一个能够充分解释这种受控多数方法取得巨大成功的理由,同时,也同样可以认为,这种方法为精明者采用策略提供了良好的机会。

2.3 策略性的受控多数投票

前述内容显示,若只投票一次且只比较两个备择对象,那么这种受控多数方法会以满意的方式起作用。当多次投票和多于

两个备择对象时，这种受控多数方法会产生严重的问题。

2.3.1 蛋糕

举例来说，我们考虑100人分享一个蛋糕。假定其中一人有一定的权力和从政的训练，他的第一目标将会是倾向于不正当的偏爱，比如说，偏向其中的50个人，排斥其余的49个人。这样，因为他们的“协作”，他能确保形成一个“51人政党”。这51人会用受控多数投票来合法决定：把49人投入监狱，将这49人应分享的东西重新分给这个政党的51个成员。

这个精明的人，如果不被某个竞争者击败的话，他会再联盟，以形成一个26人的新政党，照此继续，直到仅剩下2人作为可能的蛋糕分享者！这种受控多数方法已把权力和好处集中在一小簇人的手中。

2.3.2 德朗卡尔德、米瑟尔、黑尔思·夫雷克

即使一个集体的所有成员都使用策略性的改进技巧，只要小心谨慎，那么通过这种受控多数方法仍可达到同样的结果。

已知的这些定理大致说明了，若你的集体被划分得足够多，或者备择对象足够多，或者你控制了调整的方式和投票的规则，那么你能达到任一你想要的最终结果。

一个非常有名的例子已由法丘哈森(Farquharson，1969)给出。德朗卡尔德(Drunkand)、米瑟尔(Miser)、黑尔思·夫雷克(Health Freak)是一个委员会的三个委员，他们必须决定怎样花费一个基金的钱。捐钱的这个睿智的百万富翁在临终前，坚持在适当时候要在斯坦福(Stornford)大学的校园里建一个学生宿舍。

米瑟尔认为现在过早，这笔钱最好存入银行，让它慢慢产生

利息。

黑尔思·夫雷克认为现在合适,应该建一个很舒适的楼房,但用不着带一个酒吧。

当然,德朗卡尔德认为现在或许是合适的,但反问哪种楼房没有一个酒吧呢!?

于是,就确定了三个备择对象:

(1) 不建房子;

(2) 建没有酒吧的房子;

(3) 建有酒吧的房子。

这三人的自然排序是

米瑟尔	1,2,3
黑尔思·夫雷克	2,1,3
德朗卡尔德	3,1,2

应用这种受控多数方法就给出了顺序 1,2,3;1 被称为是孔多塞型的赢者。要是黑尔思·夫雷克是主席的话,他或许会建议举行投票,“…这毕竟是一个惟一重要的问题:我们该现在建房子,还是将钱放入银行再等一等?”那么,现在建房的决定将会以 2/3 受控多数而获通过。

满意于第一次投票结果的同时,黑尔思·夫雷克接下来或许会提出关于酒吧的问题;这将会以另一个 2/3 受控多数而被拒绝。

最后的结果是,建一个没有酒吧的楼房。

对本书的作者而言,黑尔思·夫雷克似乎是无意识地在逐一排除备择对象。在复杂的问题里,因为短期记忆的容量有限,对备择对象的这种局部处理极有可能排除掉孔多塞型的赢者,甚至会导出一个使人不愉快的选择(如上所述)。

更一般地,人们可能想知道是否应将对策略型投票的顾虑

也引入到工业过程的分析中：准则一般是由公司内部的有专业知识的专家来评定的，没有证据说明他们的裁决能避免有意识或无意识的偏见。

乍一看，人们可能会认为，一种不用操作的方法或许会更有效。但吉巴尔德(Gibbard，1973)和萨特思韦蒂(Satterthwaite，1975)都证明，只有当一种准则压倒其他准则时，才会有这种不可操纵性。其他的研究人员，如皮莱格(Peleg，1978)、迪尤塔(Dutta)和帕塔奈克(Pattanaik，1978)等，都试图刻画投票过程的特征，在这个投票过程中，专家们相同的精明性将会导出与最理想的公正结果相似的结果。但这种假设与现实相差太远。

但在一个理想的决策者大脑里，这并不是反对使用受控多数方法的重要原因。

$\{a,b,c\}$为三个备择对象的集合。假定只考虑以下权重大致相同的三种准则：

第一种准则指出备择对象排序为 a,b,c；

第二种准则指出备择对象排序为 b,c,a；

第三种准则指出备择对象排序为 c,a,b。

那么，应用这种受控多数方法将会得到：a 优于 b，b 优于 c，而 c 本身又优于 a。这样，大脑在考虑该事件时能依次取得备择对象，而不能找到最优备择对象。

这就是姆奎斯(M. J. A. M. C. Marquis de Condorcet，1785)所指出的著名的“投票悖论”。这个悖论若不多加考察仍会被认为是一个纯理论问题。事实并非如此。

简言之，我们可以发现，个体对 x 集的排序投票出现了均匀分布，如果备择对象和准则的数目都不加限制地增加，这个投票悖论的概率将迅速趋向于 1。

当备择对象的数目固定为 3 个而只有准则的数目是增加

时,久尔包德(G. Th. Guibaud)为这个概率给出了一个 0.088 的极限值(1968)。关于这个问题,更新的计算工作见菲什伯恩(Fishburn)、格赫尔莱因(Gehrlein)和马斯金(Maskin)所写的论文(1979)。

最近的工作发现,在具有许多准则和备择对象的决策中,孔多塞型效应会非常频繁地发生。这个棘手的难题是重要的,致力于计算这些相关概率的论文之多,就足以说明这一点。非常奇怪的是,为其他的多准则决策方法所作的同等意义上的计算却很少。这可能是因为每当涉及多准则问题时,我们意识里总是首先使用受控多数法。

布莱克(Black,1954)、库姆斯(Coombs,1954)和阿罗(Arrow,1951),接着是罗米罗(Romero,1978)(只举证了这个链的极端部分),提出了基于人类学的条件,这个条件暗示着受控多数选民的传递性。这些将在第Ⅰ部分中讨论。

第 Ⅱ 部分



引 言

在第Ⅰ部分里，我们将讨论两个主题：扩展条件集，它们虽然限制性很强，但模拟了一些特例，并确保了受控多数方法的有效性；就受控多数方法对一般问题的广泛适用性，给出了一个非常强而严格的限制。

我们将使用下列符号：

· X 代表备择对象的一个有限集合 $\{a,b,\cdots,z\}$。

· E（或 $E(X)$）代表一侧面，即，考察对象有 $n=|X|$ 个，对它们的 N 个排序（或称为：全序、排列、线性排列）形成了一个序列 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N,\theta_i$ 被称为准则。

· $\forall Y\subset X,\theta_i(Y)$ 代表 $\theta_i(X)$ 只限于 Y 中的备择对象。

· 若 $Y\subset X$，则 $E(Y)$ 代表因 θ_i 对 Y 中备择对象的限制而得出的序列。

· "在 $E(Y)$ 中排在最后"，它表达的意思是，$\theta_i(Y)$ 中的最后一个备选项。

我们坚持，我们的理论背景不涉及有同样得分情况出现的案例。实际上，可以暂时假定，任何准则都足够良好，以至于不会出现有同样得分的情形，对象随不同准则，总有不同的排序。

另一特性是,我们发现,奇数和偶数个个体投票对计数结果没有影响,这是因为,在真实的多准则决策中,增加或消除一个准则总是可能的。

尽管我们是以加权准则来考虑受控多数方法,我们总假定权重为整数,而且它们的确定是目前的真实决策方法之外的事。这样,就使得"加权受控多数"问题,转化为所有准则等权重的"简单受控多数"问题。

第Ⅱ部分本身分为四章。第3章对受限范围作了社会经济学的解释。第4章就各种条件建立数学框架。第5章修正了著名条件集中存在的一个传统的错误。第6章指出,就准则的结构要求来说,即使是最松散的条件也具有非常严格的限制,并对受控多数方法在事实上非委员制的多准则决策的应用方面,得出了实用的总结性评论。

3　受控多数规则传递性的第一组条件

此后所描述的条件几乎总要求奇数个准则。如先前所讨论的，这个要求对我们正在考虑的应用性并不重要；我们通常会假设有奇数个准则。同样，总假设备择对象至少有三个——因为两个备择对象的例子在先前的受控多数方法中已作了研究。

本章所描述的条件都是最后一种条件的特例。因此，对它们能够保证受控多数决策方法具有传递性的证明将在最后一例中给出。

对每个条件的应用性都要讨论。我们将描述：

(1) 库姆斯(Coombs)条件；

(2) 布莱克条件(单峰性)；

(3) 罗米罗(Romero)荫度；

(4) 罗米罗准单峰性；

(5) 阿罗和布莱克单峰。

3.1 库姆斯条件

库姆斯指出(1954),在不渴求策略性投票的情形下(如在思考中会发生的),某些突出的文化素养也许能解释受控多数方法的惊人有效性,这对团体决策尤其如此。

设 π 是关于 X 的一个数值函数,对每一备择对象 x 赋予一个数值 $\pi(x)$。比如说,设准则 i 得自一个理想数值 Π_i;准则 i 的最优目标 x_i^1 对 X 中的成员使 $|\pi(x)-\Pi_i|$ 最小化,第二最优目标以同样函数使 i 对 $X-\{x_i^1\}$ 中的成员最小化,依此类推。通过这样一个过程,就可以得到一个包含所有准则的侧面,它包含一个共同的 π 和一个相应于不同准则的 Π_i 数集,这个侧面被称为是服从库姆斯条件的。

为了更清楚上述内容,让我们来看一个例子:考虑一个掌管一定预算的委员会,它的迫切任务是为一给定的项目对一系列建议排序。

假定这个委员会成员的共同素质是非常强调钱财,且实施每个建议的费用是已知的。那么我们就可以说,这些建议将以通常的数轴作为参照轴来排列。

可以设想,在每个委员的头脑里没有一个理想的建议,但对可用于方案的钱财有一个理想数目。那么,若第 i 委员在头脑中有理想预算 B_i,当且仅当 B_i 与 x 的预算之间的绝对差值比 B_i 与 y 的预算之间的绝对差值要小时,这个委员才会建议 x 排在 y 之前。

现假定,他们按自己的感觉进行民主投票。最终结果的侧面

就会服从库姆斯条件，受控多数方法就会给出一个可传递的结果。这来自下述的简单特性，这个特性是本章中所有方法都具有的。

引理3.1 若三个备择对象，比如说，x,y,z，参照一个普通数轴排列为 xyz，而投票者服从库姆斯条件，那么对个体的任何排序 θ，$\theta(x,y,z)$都不可能是 x,z,y 或 z,x,y。换言之，在$\{x,y,z\}$中，y 不可能排在最后。

这个证明是非常简单的。设 m_{xy}，m_{yz}，m_{xz}分别为 xy 段、yz 段、xz 段的中点。当一个理想点起自于左边时，相应的排序为 xyz，当理想点经过 m_{xy}后，排序变为 yxz；当它经过 m_{xz}时，排序变为 yzx；当它经过 m_{yz}时，排序变为 zyx。结果是，y 从不排在最后*。

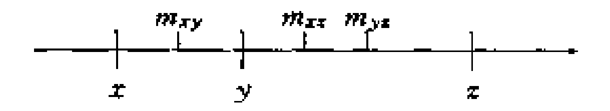
下面，我们将说明，这个命题保证了这种受控多数决策方法的传递性。

当然，非常重要的一点是找出这个条件是如何约束的，例如，它对投票者个人自由的约束。

库姆斯的观点是，文化素养通常对这个条件的自发实现有影响：在参照数据下，我们已描绘的数值结构会自然地浮现出来。

---

* 为了便于读者理解，我们绘制了此图：



——译者注

就多准则决策的实际操作而言，人并不明白准则为什么会服从这样一个文化约束，也说不清个人自由到底是什么。

在库姆斯的例子里，只要个人可以依他自己的信念自由地选择最优预算和投票，那么个人自由就不会受到限制，更确切地说，在强大的文化偏见下，个人甚至感觉不到其自由受到了限制。相反，在第二种情况下，一个准则所许可的可能排序数显然是受限制的。现在设$|X|=n$。

定义 3.1（多样化程度） 设C是能保证这种受控多数方法有传递性的条件。我们将C许可的多样性用一个比率$f(n)=F(n)/n!$来表示，这里$F(n)$是在服从条件C的一个侧面上准则所许可的不同排序的最大数（$n!$是关于X的排序总数）。这种对约束的量度仅由条件决定，并且独立于任何文化偏见。

关于这个定义有一点要注意：如果函数π是后验函数，那么任何一个全序都会对一个准则指定一个可能的序。要强调的差别是一个单独准则的潜在比率与一个实际试验所得比率之间的差别。这种多样性是一个后验的量度。我们考虑一个实际的侧面E，它服从受控多数方法可传递性的条件，如果，任何添加准则，只要它的序与E上的不同，就会破坏这个条件。侧面E上准则的最大允许排序数目就是$F(n)$。

定理 3.1 对库姆斯条件，就有：

$$F(n)=\frac{n(n-1)}{2}+1$$

证明：考虑一给定状况，并以通常数轴为参照，在相应的横

坐标上对备择对象排序。当投票者的理想点从左向右移动时，相应的投票就改变。在每两个备择对象间的中点上，投票就起变化。这样的点有 $n(n-1)/2$ 个，结果也就得到了。

从数值上来说，有：

n	3	6	10	20
$f(n)$	0.667	0.022	1.27×10^{-5}	$\sim10^{-16}$

3.2 布莱克条件

布莱克(1948，1958)给出了库姆斯条件的一个直接推广。

他的条件与库姆斯条件很相似，但布莱克的参照仅局限于排序。这可用不同的等价公式来描绘。

人们可以凭直觉认为，备择对象已按一条线排好，而且这条线是由橡胶制成的。每个投票者可以随心所欲地拉伸这个线，并按库姆斯技术投票。

另一种方法是为个体的排序描绘一种算法。设定公共参照序为 R，个体 i 可以将任何对象选定为满意的对象。比如，如果两个对象间的距离等于 R 中它们之间的排序数之差，那么被个体 i 排在第二位的对象，将会是按参照序 R 确定的两个最接近满意对象中的一个(如果是惟一的，那就是最近的一个对象)；排在第三位的对象会是剩余对象中两个最接近满意对象中的一个(如果是惟一的，那就是第二近的对象)，依此类推。

显然，如果三个备择对象 x,y,z 是按 R 中的方式排列的，那么，在这个三元对象中，个体决不会将 y 排在第三位。按这个算法，在个体的排序中，最后的对象必定为 R 的两个端点之一，

这也是显然的。如果排在最后的对象已确定,比如说是 z,则倒数第二位对象必定是 $R[X-z]$中两个端点中的一个,依此类推。

下面是该条件的另一种算法形式:通过对 R 中剩余的极端对象给出一个逐次的排序,个体就能决定他的投票。

定理 3.2 当满足布莱克条件时,则有 $F(n)=2^{n-1}$。

证明:结果可以从上面的算法中得到。这个条件比库姆斯条件提供的结构限制更少,从数值上来说,有:

		4	5	6	7
$f(n)$	库姆斯条件	7/24	11/120	0.022	0.004
	布莱克条件	8/24	16/120	0.044	0.012

由于下述原因,布莱克条件经常被称为单峰性:如果按这个参照序,你为一特定投票者做备择对象的可能个人效用图,其形状会显示出有惟一的峰值。

罗米罗给出了一个非常漂亮的算法(决策时间与备选项数目 n 之间呈线性关系)(1978),这个算法指出,对任何可能的参照序,总有一个侧面会是满足布莱克条件的。有关叙述在附录 2 中可以找到。

在罗米罗的论文中(1978),他叙述了两个新的条件:荫度和准单峰性,它们是对库姆斯条件和布莱克条件的推广。

3.3 罗米罗荫度

树是一个没有环路的连通图。设想将如图 3.1 所示的一棵树嵌入欧几里得空间。将与备择对象对应的老鼠和与准则对应的猫沿着这棵树的边缘分布。猫是会这样对老鼠排序的：沿着这棵树的边缘由近及远。相应地，准则也会以同样方式排列备择对象。

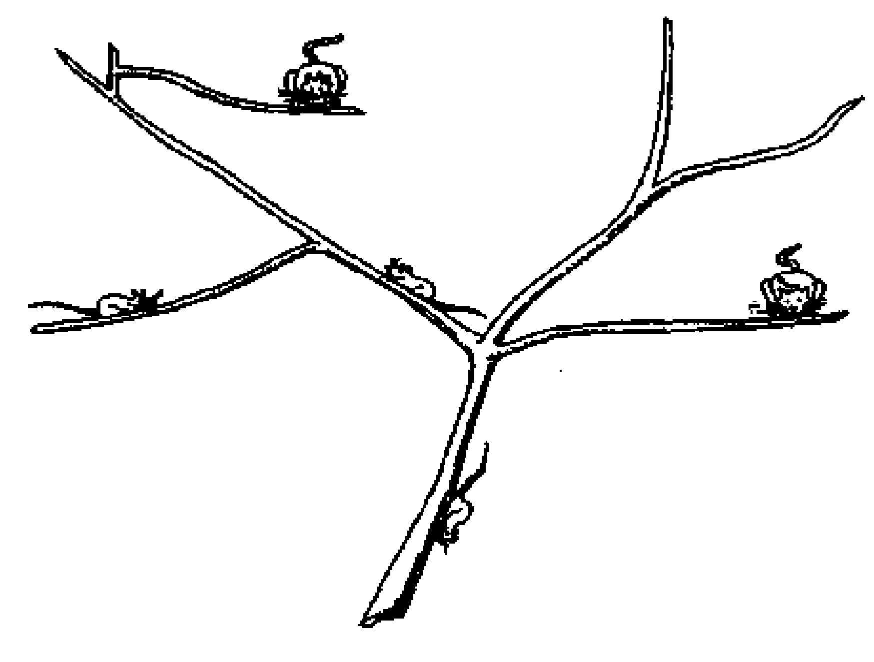


图 3.1

更正式的描述是，嵌入欧几里得空间的树 T(因为在 T 上，两点间只有一条路径)，为 T 上的点引入一个距离函数 d。

设 p_c 代表准则和 T 上点的第一个集合之间的一一对应关系，称为点一准则；p_a 代表备择对象和 T 上点的第二个集合之间的一一对应关系，称为点一备择对象。

称侧面 E 服从这个**荫度条件**，是指当距离 $d(p_c(i), p_a(x))$

小于 $d(p_c(i), p_a(y))$时，备择对象 x 就会被准则 i 排在备择对象 y 之前。

引理 3.2 如果一侧面服从这个荫度条件，那么对于备择对象的任何三元组，有一个对象总不会被任何准则排在第三位。

证明：如果对应的三个老鼠处在同一条路径上，那么这个结果自然成立。

如果这三个老鼠两两之间的最短路径为 Y 形，则可以容易地看到，离这个 Y 形交叉点最近的老鼠对应的这个对象就不会被任何个体投票排在三元组的第三位上。

这个条件还没有一个已知的一般验证方法。它的适用性似乎仅局限于一个非常特别的范围：从树形结构的一系列可能的位置中，确定某种共同效益的位置。

对应于这个荫度条件的$F(n)$值以如下这个单一条件对应的$F(n)$值为界：每个三元组中的某一个备择对象从不排在最后。这个上界以后会计算。

荫度暗示着另一条件，我们称之为（为了与下面讨论一致）镜像荫度（arboricity-in-the-mirror）。

假定以老鼠来排列猫。当然，最好的猫会是离老鼠最远的一个！这个条件，看起来像一个笑话，但它对寻找一个更少竞争的环境是有意义的。在这个模型中，老鼠是可能的竞争者，而猫代表了可能的限制。每一个准则根据备选项对相应竞争者的限制的程度将其由好到坏排序。

3.4 罗米罗的准单峰性

这是对具有两个参照序的布莱克条件的一个推广，并且与布莱克和纽因格(Newing，1951)引入的条件有松散的联系。

首先，通过一个例子来引出它的定义：考虑一个大学的一些现行研究项目。校长有权对那些面临着不可预见困难的项目予以额外的资金支持。请两位有不同特殊倾向的副校长来对这些方案排序，排在第一位的(也即最好的)项目是在现有条件下最易实现的(所以最可能毋需任何额外资助就能完成)。

假定董事会成员认为两位副校长在专业上是同等胜任的，而两位副校长所给出的排序又极为不同，董事会就需要按两位副校长所做计划的预期货币需求，对这些项目排序。于是，这些成员会将他们的选票投在两位副校长已排序项目中最少需求(也即最后的)的项目上，他们会接着把剩下的“最好”项目作为第二项目，依此类推。

由这些成员的投票所组成的侧面，就称它服从这个准单峰性条件。

更规范而言，先设 R_1 和 R_2 是 X 的两个参照序。

定义 3.2(准单峰性) 考虑一侧面 E 中的准则 K。设 Y 是根据这个准则，排在的最后 p 个对象组成的集合，$X-Y$ 是剩余对象的集合。若 K 中的倒数第 $(p+1)$ 个备择对象是 $R_1(X-Y)$ 或 $R_2(X-Y)$ 中的最后备择对象，且这对 E 中任何 K 和 p 来说都为真，那么，称 E 服从准单峰性条件。

显然，如果 R_1 和 R_2 是对立的，那么这个条件与布莱克条件是一致的。但通过下面的例子容易看出，一般情况下这不能成立。考虑侧面{(*dcba*),(*acbd*)}，对参照序 *dcba* 和 *acbd* 来说，这自然是准单峰的，但不是单峰的。倘若它是单峰的，那么它的参照序就会以 *a* 和 *d* 来开始和结束，这有 4 种可能情况：*dbca*，*acbd*，*dcba*，*abcd*。但是，在布莱克侧面中，第一个准则 *dcba* 不能接受前两个参照序中的任何一个。第二准则和后两个参照序也是如此。

引理 3.3 给定服从准单峰性条件的一个侧面 E，对于备择对象的每个三元组来说，有一个对象不会被任何准则排在这个三元组的最后。

这个命题隐含多数受控方法的传递性，它的证明是直接的。

我们假定，按第一参照序，三元组中排最好的对象是 x，按第二参照序，排最好的对象是 y，那么 z 就决不会排在这个三元组的最后，因为 x 或 y 先前已经被排在最后了。

现在，如果两个参照序都将同一备择对象排在第一，那么另两个备择对象就决不会被任何投票排在最后。

当然，目前还没有一种算法可以检验这个条件。它的应用——一种先验的——是例外的，因为它暗示着在每一步中，必须从 R_1 或 R_2 的两个最好对象中挑选出最优，而不是将有诸如最小平均秩(名次)的对象当做是“最好”的。

显然，根据对这一条件的定义，服从这个条件的一个侧面中，不同个人排序的最大数上限为 2^{n-1}。

罗米罗在他的论文中作出了另一解释，这解释看起来是不现实的，但或许能为更好的排序提供一个启示。考察某特护中心

的一组病人。两种主要的疾病正在威胁着这组病人：心脏病和肾衰竭。心脏专家“有目的地”将病人按其心脏的状态排序；肾专家对病人按其肾的状态也同样作了排序。接着，将这些信息交给全体工作人员，要求他们按病人的虚弱程度，从重到轻来排序。

由于不管是心脏完全衰竭，还是肾完全衰竭，对病人都会是致命的，所以罗米罗假定只要病人在两种排序中有一种是最差的，工作人员会将其排为最虚弱的，即心脏专家将其排序为最差，或肾专家将其排序为最差。接着，为排出第二最差的病人，这个中心的工作人员会将已排为第一最差的病人剔除，在剩余病人中进行同样的排序过程，等等。

这个模型可能是不精确的，因为存在协同效应：在两种标度中，一种标度作出的一个排序可能受另一种标度所作出的排序的制衡。我们会发现，当采用不同的排序方式——由好到坏排列或由坏到好排列时，情况显然会有变化。在一些例子中，三元组中的某一个备择对象从不排在最后；在另一些例子中，三元组中的某一个备择对象从不排在第一位。我们应该看到，这两类例子，都隐含着受控多数方法具有传递性。

3.5 阿罗—布莱克单峰

前面四个条件都有一个共同点：它们都是阿罗—布莱克单峰条件(Arrow,1963)的特例。

定义 3.3(单峰) 对于备择对象的任一三元组$\{x,y,z\}$，其中至少有一个备择对象从不会被任何准则排在这个集合的第三位。

这个纯代数条件似乎不具有与我们最终目的有关的心理学解释。可是,在准则许可的多样性方面,它似乎比前面描述过的条件更为丰富。科赫勒(Kōhler,1978)给出的下面这个结果矛盾地显示出单峰不比我们已描述过的上述三个特例具有更强的多样性。

罗米罗是首先清楚地指出单峰不等于单峰性的人之一(1978):我们刚才的一个例子,显然是单峰的,但它不服从布莱克条件(对备择对象的任何三元组,按两个准则中任何一个准则,有一个备择对象至少是不可能排在最后的)。

在此,不得不稍多作一些论述。在先前的所有条件中,有一个参照结构是所有准则的共性:库姆斯条件中的数轴;荫度条件中嵌在欧几里得空间中的一棵树;其他准则的一个或两个线性序。在我们对阿罗—布莱克条件的表述中,这个共同的"一致性"不是整体的,它仅限于三元组。甚至可以说它并不需要给出禁止排序的三元组,而只需给出一个侧面 E,如果其中禁止排序的任何集合都有性质:对备择对象 T 的任何三元组来说,其中一个备择对象在 $E(T)$中从不被排在第三位,该条件就成立。

因为这个原因,我们的多样性指数应视为一种仅与预防有关的自由程度的度量。设想准则是投票者,他们依次投票,主席不参加投票,他在投票前给每个投票者一份条规清单,以确保投票不会破坏这个条件。那么,第一个投票者会有一张没有限制条规的清单,限制个体自由的条规会随着已投差异票数目的增加而同步地增多。

这是为什么我们尽力避免使用自由这个词,而用多样性程度这个词来代表比率 $F(n)/n!$ 的原因之一;自由这个词实际上有太多的意识形态的含义。

定理 3.3 当满足阿罗—布莱克条件时，$F(n)=2^{n-1}$。

证明：(1)考虑一侧面 E，对任何 $Y\subset X$，$|Y|\geqslant 3$，在 $\theta_i(Y)$ 中，排在最后的对象数至多为 2。那么，如果 Y 是任意三元组，则这意味着它的三个元集中有一个是从不会排在最后的，这是阿罗—布莱克条件。(2)假设某侧面 E' 上存在一集合 $Y\subset X$，$|Y|\geqslant 3$，使 θ_i 中排在最后的对象集合至少包含其中的 3 个对象 x,y,z。那么，对三元组 $\{x,y,z\}$ 来说，阿罗—布莱克条件就不会被满足。这样，如果阿罗—布莱克条件被满足，那么对所有 $Y\subset X$，$|Y|\geqslant 3$，在 θ_i 中排在最后的对象集合至多有 2 个对象。(3)现按任何指定准则构建排序，如果首先设定其排序最后的对象，那么，其可能项并非 X 中所有的元素，而是如我们刚才已见到的，实际只有两个元素。设 z 是被选定的对象，在剩余集 $X-z$ 中排在第二差的对象，实际只能是两个集中的一个元素，依此类推，于是有 $F(n)=2^{n-1}$。

现在，另一结论应能同样给出了。

定理 3.4 阿罗—布莱克条件能保证受控多数投票的传递性。

证明：考虑一三元组 $\{x,y,z\}$，假设受控多数规则（"有奇数个准则"）不具有传递性，而有严格多于 50%的准则，排列 x 比 y 好，y 比 z 好，z 又比 x 好。这意味着，在这些严格多数的必要非空对的交集中，一个投票的序是 xyz，一个是 yzx，一个是 zxy。这样，E 就不服从阿罗—布莱克条件。

那么,对三元组$\{x,y,z\}$来说,阿罗—布莱克条件就不会被满足。于是,如果阿罗—布莱克条件成立,则对所有$Y\subset X$,$|Y|\geqslant 3$,在θ_i中排在最后的对象集合至多包含两个对象。

由此我们可以推出,那些具有有意义的解释的条件是单峰的阿罗—布莱克条件的特例。但这种被强加在这些侧面上的单峰限制,使我们无法相信,受控多数方法会能解决本书所关心的排序问题。这在克拉默(Kramer,1973,1976)的论文中已经提到了。

可是,我们应选择某些纯代数条件,使之扩展并能解释。数学上的深思熟虑则会引导我们放弃我们刚才关于受控多数方法的不切实际的假想。

接下来的三章对受控多数方法的极有限的有效范围,会作一些精确的描述。这给了运筹学家一个恰当的工具,他们能用它来判断很少数的例子,对这些例子中的多准则排序问题来说,这种受控多数方法会是一个成功的模型。

4　具有解释性的更多条件

科赫勒(Köhler,1978)、罗米罗(1978)和拉瑞德(Raynaud)(1981a,b)作了更深入一点的研究,希望将这种受控多数方法具有传递性的条件集合尽可能扩大。从数学上来说,现行的纯代数条件在本章和下一章中都更强调技术性。

更深入研究的动机仅仅是由于阿罗—布莱克条件限制过于严格,以致不能将其视为一种能真正还原受控多数方法对现实多准则决策的功效的方法。如在第1章和第2章中所描述的,对大量的准则和备择对象,这种方法必须为巨大的方案集合给出一个全序。这种方法的“功效”,与一个委员会所用方法希望产生的“功效”是不一样的:为了保证方法有效,我们要求它具有传递性和稳健性。

4.1　条件 C_{ij}

通过科赫勒(1978)的 Ref(i,j,v)条件的特例,我们可以进一步探讨受控多数规则具有传递性的条件集合的算法解释;从中,能得出使这种受控多数决策方法具有传递性的九个条件,它们都能形成具有社会或经济解释的算法。先前所述都将在这个

结构中出现。其他一些在算法的形式上至少是新的,它们可以为一些有效的多准则决策作解释。

在本章中:

· X 代表备择对象的一个有限集合。

· E(或 $E(X)$)代表准则 X 的一侧面,也即按准则对所有 X 的排序 $\theta_1,\cdots,\theta_N$。

· $\forall Y\subseteq X,\theta_m(Y)$ 表示 θ_m 仅考察 Y 中的备择对象,$E(Y)$ 表示侧面 E 只限于 Y 中的备择对象,也即 $\theta_m(Y)$ 的序列。

· CTMM 表示受控多数决策方法有传递性的条件。

· 本章中每个CTMM 都由某些侧面的被禁条例组成。在满足条件 C 的一个侧面中,不同排序的最大个数为 $F^C(n)=n!f(n)$。

如果 R 是一个给定的参照序,i,j,v 是三个整数,有 $0<i\leqslant v+1,0<j\leqslant v+1$。科赫勒(1978)的 Ref$(i,j,v)$条件认为,"$\forall Y\subseteq X,|Y|=v+1$,在任何 $\theta_m(Y)$ 中,$R(Y)$ 的第 i 备择对象从不排在第 j 位"。

我们在此设定 $v=2$,则 i 和 j 能取值 1,2,3。那么就可以写出九个 Ref(i,j,v)条件了。这些条件用 C_{ij}来表示,R 是固定的,则 C_{ij}只取决于 i 和 j。

熟悉投票理论的读者会知道,C_{ij}条件是著名的纯代数瓦尔德 CTMM 的特例。

下面介绍瓦尔德(Ward)条件(1965)。

称一侧面服从瓦尔德条件是指,当且仅当在 X 中,不能找到具有如下性质的三个备择对象 a,b,c 和三个准则 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$:

$$\theta_1(a,b,c)=a,b,c$$

$$\theta_2(a,b,c)=b,c,a$$

$$\theta_3(a,b,c)=c,a,b$$

这个条件经常被这样描述,"E 中不存在孔多塞三元组"。

定理 4.1 对任何奇数个准则，瓦尔德条件保证了受控多数规则的传递性。

证明：设 E 是服从瓦尔德条件的一侧面。若有严格多于 50%的准则将 a 排在 b 前，又有严格多于 50%的准则将 b 排在 c 前，那么，就不可能有严格多于 50%的准则，将 c 排在 a 前。

否则就至少会有一准则将备择对象排为 a,b,c，另一准则将备择对象排为 b,c,a，第三个准则将备择对象排为 c,a,b，这样 E 就不服从瓦尔德条件。

引理 4.1 C_{ij}条件是瓦尔德条件的一特例。

证明：对每个三元组 $T(a,b,c)$来说，在 $E(T)$中，能找到两个不同的可转换的拉丁方阵：

$$\begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{matrix} \quad \text{和} \quad \begin{matrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{matrix}$$

任何 C_{ij}条件都使这两个拉丁方阵的每一个中，至少有一条线不允许出现（通过简单枚举，就可以直接得到验证）。

4.2 CTMMs 的算法

C_{ij}条件之间的特定关系，强化了这些条件含义之间的相似性。为了描绘 C_{ij}条件两两之间特性上的相似性，我们需要回顾一些工具。

定义 4.1（罗米罗，1978） 设 C 是一个 CTMM，我们说，如果 E 的镜像排序服从 C，则称 E 服从 $\bar{C}$ 或 C 的镜像（这与 P.C. 菲什伯恩（1973）所说的对偶或逆转的序和侧面是一致的）。

容易看出，$\bar{C}$ 是一个 CTMM。如果用 $\bar{\theta}_m$* 来代表 θ_m 的镜像，则可以用 $\bar{E}$ 来代表侧面（$\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \cdots, \bar{\theta}_N$）。还有，在服从条件 C 的一侧面上，容许的准则最大个数 $F^{\bar{C}}(n)$ 等于 $F^C(n)$。

定义 4.2 设 R 是 X 的一个参照序，θ 是 X 的一个全序。任何对偶（θ, R），就可以将矩阵 $M_R(\theta)$ 与 n^2 个元素 P_{ij} 联系起来，其中 $P_{ij}=1$ 的充要条件是 R 中的第 i 备择对象是 θ 中的第 j 备择对象，其余情况 P_{ij} 均为 0。

若用 $M'_R(\theta)$ 来代表 $M_R(\theta)$ 的转置，$M'_R(\theta)$ 相当于是一个排列矩阵，可以惟一地记为 $M_R(\theta')$。θ' 为 θ 的转置序；$E'=(\theta'_1, \theta'_2, \cdots, \theta'_N)$ 为 $E=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N)$ 的转置侧面。

许多作者以不同的名称，如反演、对偶等等，引用了这种转置算法。关于定义 4.1、定义 4.3 和引理 4.3 更详细的内容，可以见科赫勒（Köhler，1978）的著作。

定义 4.3 当且仅当 E' 服从 C 时，E 才服从 CTMMC'。

引理 4.2 $F^{C'}(n)=F^C(n)$。

证明：转置是全序集合对自身的一个二重映射**，这个事实

---

* 原书此处为 θ_m，应用 $\bar{\theta}_m$。——译者注

** 二重映射是两个集合间的 1－1 对应关系。——译者注

使结果直接得到。

引理 4.3 $C_{ij}=C'_{ji}[=(C'_{ij})']=C_{i,4-j}$。

证明:(1) 考虑在一侧面 E 中服从 C_{ij}条件的 θ,和备择对象 (x,y,z)形成的三元组 T 对应的一个 $M_R(\theta)$的 3×3 子矩阵。若对于 T 来说,$R(T)$中的第 j 备择对象,在 θ 中不在第 i 位,那么,在子矩阵中对应(j,i)的元素等于 0。若将 $M_R(\theta)$作转置,子矩阵仍与 T 中的备择对象相对应,但子矩阵本身已作了转置,那么,其元素(i,j)等于 0。因为 R 保留原样,所以在 θ'中,可以说,第 i 个备择对象从不排在第 j 位。(2)考虑服从 C_{ij}条件的 E。设 T 是 X 的一个三元组,x 在 $R(T)$中是第 i 个备择对象。设 $\theta\in E$,那么很清楚:

- 如果 x 在 θ 中从不排在第 3 位置,则 x 也从不会排在 $\bar{\theta}(T)$的第 1 位置;
- 如果 x 在 θ 中从不排在第 2 位置,则 x 也从不会排在 $\bar{\theta}(T)$的第 2 位置;
- 如果 x 在 θ 中从不排在第 1 位置,则 x 也从不会排在 $\bar{\theta}(T)$的第 3 位置;

这样,所要的结论就得到了。

引理 4.4 具有参照序 R 的 $C_{4-i,j}$(这里 $i,j\leqslant 3$)是与 C_{ij}一样的 CTMM,但 C_{ij}以 $\bar{R}$ 作为它的参照序。

证明留给读者。

接下来将以 r 表示将一个侧面上的参照序反转所得的算

法。

4.3 C_{ij}图的三个分支(拉瑙德,1981a)

现在,我们将这9个C_{ij}视为图G的顶点。这个图的一个弧将连通C_{ij}和C_{lk},当且仅当C_{lk}能以如下之一的方法从C_{ij}中得到:

- 镜像算法:$C_{lk}=C_{ij}=C_{i(4-j)}$;
- 转置算法:$C_{lk}=C'_{ij}=C_{ji}$;
- 算法r:$C_{lk}=C_{(4-i)j}$。

由于这三个算法的幂等性,G是对称的。于是,它有三种边,各用m,t,r表示,分别代表三种连通分支,如图4.1所示。

4.3.1 第一种连通分支

第一种连通分支与已知条件有关。C_{23}是如前所述的布莱克条件,于是有$\bar{C}_{23}=C_{21}$。对服从C_{21}的每个侧面,存在服从C_{23}的惟一一个侧面E与之相对应,它是通过反序获得的。

现考虑C_{12}和参照序R。R中的第一备择对象,在所有包含它的三元组中都是第一备择对象,它不可能位于任何三元组的中央。它必定被准则排成是最好的或者是最差的备择对象。接着便是排出第二最好的或最差的对象,依次类推。由此就可得出决策方法:备择对象可按处理方式的不同分为两类,每一类均按"先到先得"原则排序;参照序R仅作为实现评判备择对象的标准。换言之,每一个评判仅是对备择对象集的一次分割,那么在决策优先权中,起作用的就是参照序而非评判。

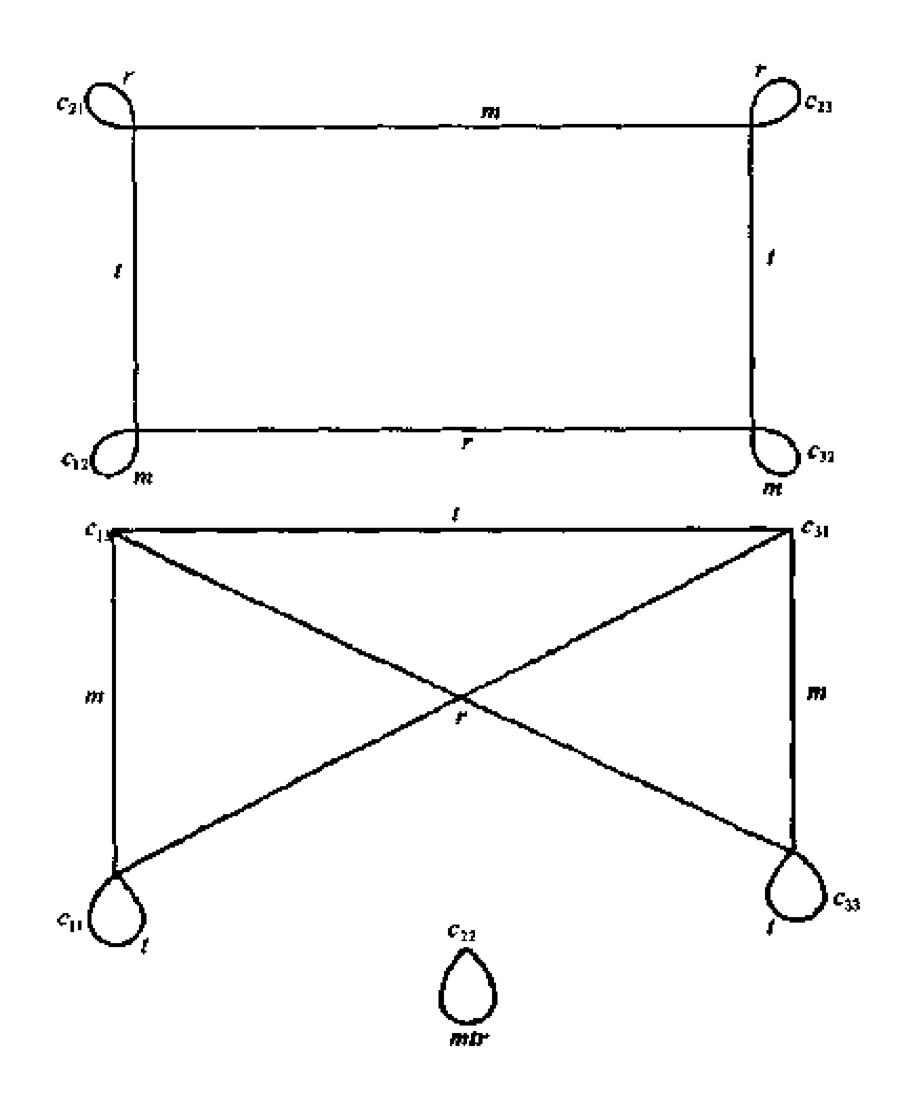


图 4.1

比如，设想参照序是按每个备择对象所占预算的份额排出的一个序；接着要求评判将方案排成两类：可能适用的和可能不适用的。受控多数规则将按公司的战略对多个方案作明确的判断：若方案可行，则所需费用最高的是最好的；若方案不可行，则所需费用最高的是最不好的！

这个条件被清楚地称为“有参照序的二分。”

要为某给定侧面确定满足这个条件的未知参照序，只需从这样的事实中导出：$\forall\ Y \subset X$，$R(Y)$中的第一备择对象，在$E(Y)$

中必将被排在第一位或最后一位。

于是可依次如下进行:

(1) 设 X 是起始步中剩余备择对象的集合。

(2) 在每一步中,设 Y 是剩余备择对象的集合。考察 $E(Y)$:若没有只出现在首位或末位的备择对象,则该问题无解;若有,比如说是 x,则将 x 从 Y 中消去,且将它排为 R 中下一个位置的备择对象。

(3) 此后,$Y-x$ 成为剩余备择对象的集合。如果集合非空,则重复进行步骤(2);若集合为空,则这个运算完成,对 R 来说,所得的解都是满意解。

参照序反转后,C_{32}必与 C_{12}一样。参照序的反转则仅是一种习俗的改变而已。

4.3.2 第二种连通分支

第二种连通分支包括了具有相似解释的条件,只要通过算法 m 和 r 的使用,就能直接由此及彼地得出。

由这些条件还无法得出一种可描绘按某一准则所作的排序的算法。例如,考虑 C_{13},参照序中的第一备择对象,在包含它的所有三元组中都是第一位的,这意味着,在任何准则中,它的序必定是 1 或 2。于是,为了建立某一准则的排序,可以这样做:

(1) 考虑参照序对尚未排好序的备择对象的限制。取出排在首位的备择对象,将其列入两个最优序之一中。

(2) 如果剩余的备择对象多于一个,则重复步骤(1)。

通过将"最好"变为"最差"(对 C_{31},还有由"第一位"变为"最后一位"),可以得到一个相应的 C_{11}的算法。

如果你怀疑侧面 E 是否服从条件 C_{13},则可以考察它是否存在相应的参照序,这是不难的。

(a) 依次写出所有排序，考察前两列，查看是否存在某一备择对象总排在第一位或第二位。如果没有，则该问题无解。

(b) 如果有这样的备择对象，则它就是第一参照序的候选对象。将它列为第一备择对象后，就可以从原资料中将它消去，然后对剩余备择对象继续进行。

这样，很清楚有：

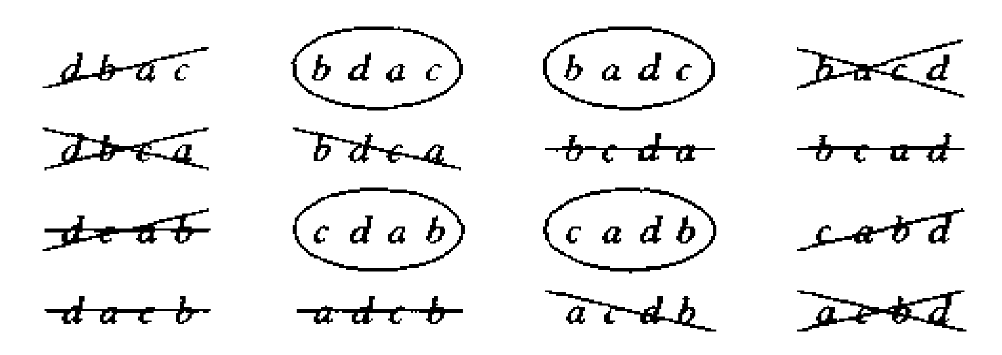
$$F^{C_{31}}(n)=F^{C_{13}}(n)=F^{C_{11}}(n)=F^{C_{33}}(n)=2^{n-1}$$

条件 C_{31}，C_{13}，C_{11}或 C_{33}可解释为一种时序过程，在这个过程中，引入的每个备择对象将被依次归成第一类或第二类。如果它属于第一类，则它将占据剩余的第一个空位；如果它属于第二类，则它将使第一序位仍然空着，而去占据下一个空位。

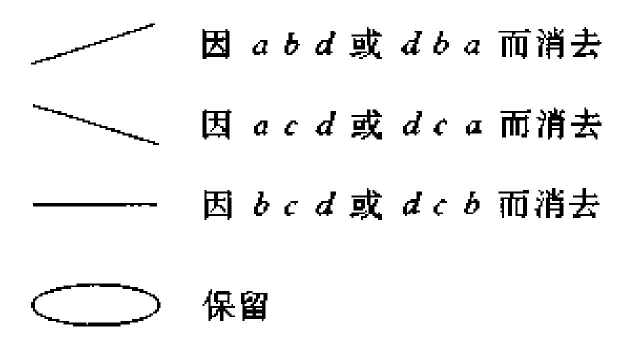
4.3.3 剩下的连通分支

剩下的连通分支是初始的 C_{22}(拉瑙德，1981)。为什么是初始呢？你或许会想，给定一参照序 R，在服从 C_{22}的侧面中，不同排序的最大个数为 2^{n-1}。对于 $X=\{a,b,c\}$来说，这至少是真实的：如果(a,b,c)是参照序，则有$\{bac,bca,cab,acb\}=E^3_{max}$。

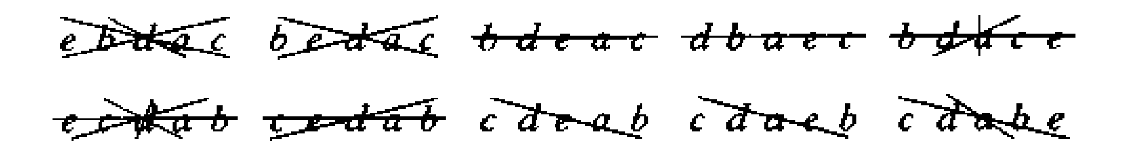
对满足 C_{22}的一个侧面，如果你试图由枚举来得到 $F(4)$，则可以将第 4 备择对象，比如说 d，引入到先前的序 E^3_{max}中，接着消去包含不许可三元组的排序 1，如下所示：



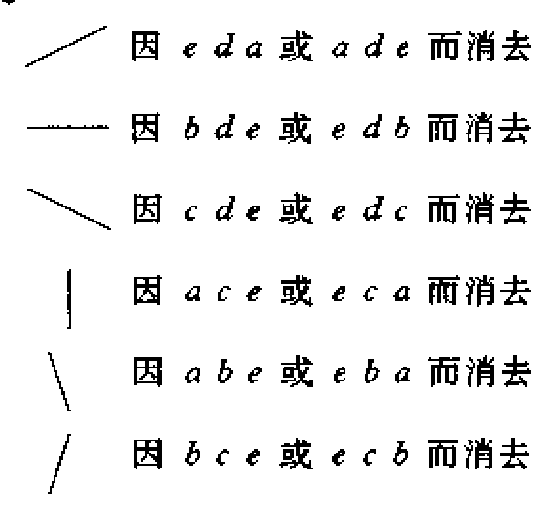
图例为:



现在,如果你试图引入第5个备择对象 e,你可以得到



图例为:



由于对称性原因,另有10个对称的序被消去。

换言之,对于 $|X|>4$,且满足 C_{22} 的 X,这样的侧面不存在。这一推测现在被证实了,它有一个漂亮的经济学解释!

对具有参照序的这些条件所作的研究和某些解释，驱使我们走向布莱克条件另一更代数化的推广，这引导我们进入传统性的错误，这些将在下一章中论述。

5 从受控多数规则的因纳达条件得出的悖论

在一篇著名的论文中，因纳达（K. I. Inada，1964）推广了阿罗一布莱克的单峰。他定义了两个新的条件（引用时经常被称为因纳达条件）和另外一个条件，也就是二分条件，他认为第三个条件等价于前两个条件中的某一个，即非居中条件（NITM）。莫顿（Morton，1966）是首位怀疑这个特性的人。本章中，我们可以看到，二分条件是严格地包含在非居中条件之内的。这个研究将使我们能够显示，这些条件不会比单峰具有更多的多样性。

5.1 因纳达条件

定义 5.1 如果对所有三元组$\{x,y,z\}$中，三个备择对象的其中之一在任何$\theta_i\{xyz\}$中，从不排在第一位，则称E服从单谷性（single-cavedness）。当然，单谷推广了C_{11}，C_{21}和C_{31}，它其实就是镜像中的单峰。

定义 5.2 如果对所有三元组$\{x,y,z\}$，三个备择对象的其

中之一在任何 $\theta_i\{xyz\}$ 中从不排在第二位，则称 E 服从非居中条件（简写为 NITM 条件）。

当然，NITM 条件推广了 C_{12}，C_{32}和 C_{22}，这也许能解释为什么不容易对 NITM 条件计算 $F(n)$：在上一章中，我们指出了 C_{22} 的不正规性。

为了简洁明了地定义二分条件，我们需要一些如下附加记号：

· 设用 Y 和 Z 来代表 X 的两个不相交的子集。

· 设 θ 是 X 的任意排序，$\theta(Y)$代表 θ 对 Y 中备择对象的限制，相应地 $\theta(Z)$代表 θ 对 Z 中备择对象的限制。

· $\theta(Y)\theta(Z)$（或 $\theta(Z)\theta(Y)$）代表 $Y\cup Z$ 的排序，表示 Y（或 Z）中所有备择对象，在所有 Z（或 Y）的对象之前，这样就使 $\theta(Y)\theta(Z)$对 Y 中备择对象的约束精确为 $\theta(Y)$。

定义 5.3 如果对任意 $Y\subset X$，可以将 Y 分割为两个非空子集 Y_1，Y_2，使得对任何准则 θ，有 $\theta(Y)=\theta(Y_1)\theta(Y_2)$，或 $\theta(Y)=\theta(Y_2)\theta(Y_1)$，那么称 E 服从二分条件。

作为一个直觉的表述，可以说，对 X 的任何子集 Y，存在将 Y 分成 Y_1，Y_2 的一个二分，使得对于任何准则，有 Y_1 中所有备择对象在 Y_2 中所有备择对象之前，或是 Y_2 中所有备择对象在 Y_1 中所有备择对象之前。

读者或许想知道，二分与单峰是否有显著差异，下面的例子将清晰地显示这一点。考虑 $X=\{a,b,c,d\}$的一个由三个序 $abcd$，$adcb$，$dbca$（分别用 1，2，3 来代表）给定的侧面。

侧面服从二分条件：先能形成$\{a\}$、$\{b,c,d\}$二分，接着$\{b,c,d\}$能被二分成$\{d\}$、$\{b,c\}$。结果是，对任何 $Y\subset X$，都存在一个满

足该条件的对 Y 的二分。

现考虑以下三元组

· 对$\{a,b,c\}$，a 在序 3 中位于最后，b 在序 2 中位于最后，c 在序 1 中位于最后。

· 对$\{a,b,d\}$，a 在序 3 中位于最后，b 在序 2 中位于最后，d 在序 1 中位于最后。

· 对$\{a,c,d\}$，a 在序 3 中位于最后，c 在序 2 中位于最后，d 在序 1 中位于最后。

· 对$\{b,c,d\}$，b 在序 2 中位于最后，c 在序 3 中位于最后，d 在序 1 中位于最后。

这样，E 不满足单峰条件。

5.2 二分条件和 NITM 条件之间的关系

定理 5.1 如果一侧面 E 服从二分条件，那么它也服从 NITM 条件。

证明：考虑备择对象的任意三元组$\{x,y,z\}$。因为 E 服从二分条件，可不失一般性地将其二分为 $Y_1=\{x\}$ 和 $Y_2=\{y,z\}$，使该准则的所有可能排序是：

$$xyz, xzy, zyx \text{ 或 } yzx$$

在这些排序中，x 从不排在第二位，符合某一备择对象从不在中间位置的条件。

引理 5.1 只包含 2 个准则的任何侧面，都服从 NITM 条件。

证明:这是显然的。

引理 5.2(拉瑙德,1979) $K=\{abcd,bdac\}$是一个侧面,它服从 NITM 条件,但不服从二分条件。

证明:可以列出序 $abcd$ 可能的三个二分:
- $\{\{a\}\{bcd\}\}$;
- $\{\{ab\}\{cd\}\}$;
- $\{\{abc\}\{d\}\}$。

但是,它们都不允许第二个排序。这样,结论就可以从定义 5.3 中直接得到了。

定义 5.4 如果用准则的一个子集对 E 中备择对象的一个子集加以限制,可以得到侧面 E',那么我们可以说,E' 是 E 的一个子侧面。

显然,由引理 5.2 可知,如果 K 是 E 的一子侧面,那么 E 不可能服从二分条件。这样,满足 NITM 条件的侧面中存在 2 个子集:

(1) 满足二分条件的侧面子集(K 不是它的子侧面)。

(2) 包含子侧面 K 的侧面子集。

稍加排列组合就可以知道,以上是仅有的两种可能。

定理 5.2(拉瑙德,1981a) 任何满足 NITM 条件的侧面,必定包含子侧面 K,或服从二分条件。

证明：对三个备择对象的一侧面，这个定理的真实性是显然的。

假定这个定理在$|X|=3,4,\cdots,n-1$时为真，而在$|X|=n$时为假。这意味着存在X的一个侧面E(X是n个备择对象的集合)，满足NITM条件，而不包含K，也不满足二分条件，但它的含有$n-1$个备择对象的所有子侧面都满足二分条件。设$\lambda\in X$，E'是E对$X-\lambda$的限制。存在这样的Z和Y，使E'中的任何准则θ_m，将Z中所有备择对象都排在Y中所有备择对象之前，或者将Y中所有备择对象都排在Z中所有备择对象之前。通过这一证明，可以清楚地得出结论：$\theta_m(X-\lambda)=ZY$或YZ，其中，Z(或Y)广义地代表Z(或Y)中备择对象的一个排序。

如果用Y^{λ}(或Z^{λ})来代表包含Y(或Z)中所有备择对象和λ的一个排序，且λ在这个排序中不处于某一端，则可预知E可能含有5种类型的排序，即：

(1) λZY或$YZ\lambda$；

(2) $Z^{\lambda}Y$或YZ^{λ}；

(3) $Z\lambda Y$或$Y\lambda Z$；

(4) ZY^{λ}或$Y^{\lambda}Z$；

(5) $ZY\lambda$或λYZ。

(a) 显然，一种准则不可能只产生一种类型的排序，因为在那种情况下，E是服从二分条件的。

(b)如果一侧面包含类型1,2,4或1,3,4的排序，则对该侧面来说，存在Y的一个元素y，Z的一个元素z，使$\{\lambda,y,z\}$不满足NITM条件。

由于对称的原因，对类型4,5,2和类型5,3,2，以上结论同样为真。于是有至少4种排序的任何侧面，至少会包含三种互不

相容的准则，例如，某侧面包含类型 1，2，3，4 的排序，它会包含类型 1 的一种准则，类型 2 的另一种准则和类型 4 的另一种准则，而这三种类型并在一起与 NITM 条件是不相容的。

现考虑一侧面，它包含组合 2，3，4 或 1，2，5；1，3，5；1，4，5 中的任何一个。显然存在另一不满足 NITM 条件的三元组$\{z, y, \lambda\}$。这样，E 不能包含能给出 5 个甚至 4 个排序的准则，因为$\{\lambda, y, z\}$会不服从 NITM 条件。

同理，在包含有三种排序的侧面中，只有$\{1,2,3\}$和$\{3,4,5\}$会是可行的组合。但第一个例子中的$\{Y, Z+\lambda\}$和第二个例子中的$\{Z, Y+\lambda\}$会指定 E 的二分。

(c) 从所有这些可以看出，E 可能只包含两种排序。所有明显的二分组合为(1，2)，(1，3)，(1，5)，(2，3)，(3，4)，(3，5)，(4，5)。有 3 个组合仅是推测可行：(1，4)，(2，4)和(2，5)。注意，(1，4)和(2，5)是对称的，所以只需研究(1，4)和(2，4)。

(d) (1，4)的情形。如果递归假设担保$\{Y_1 \cup \lambda, Y_2\}$是 $Y \cup \lambda$ 的二分，$\{Z_1 \cup \lambda, Z_2\}$是 $Z \cup \lambda$ 的二分，则类型 1 的准则将会依次排出 $\lambda, Z_1, Z_2, Y_1, Y_2$，或者倒过来排列；而类型 4 的准则将会依次排出 $Z_2, Z_1, Y_1 \cup \lambda, Y_2$，或 $Z_2, Z_1, Y_2, Y_1 \cup \lambda$，或者以相反的次序排列。

最后的第四种方式必定会出现。如果类型 4 的排序都使 Y_2 位于端点位置，这就意味着 Y_2 和余下的是一个二分。

这样，至少有一种准则，会依次排出 $Z_2, Z_1, Y_2, Y_1 \cup \lambda$(或者反序排列)，其中 λ 不能在端点位置。现考虑 z，y_1 和 y_2，使 $z \in Z$，$y_1 \in Y_1$，且 y_1 在这些最后准则之一中位于端点位置，$y_2 \in Y_2$。可以肯定，存在一准则，其排序为 $\lambda z y_1 y_2$(或相反排列)和另一排序 $z y_2 \lambda y_1$(或相反排列)。这不会是别的，只能是准则 K。

(e) (2，4)的情形。用相同的记号，类型 2 的可能排序可以

从以下 4 个子集中挑出：

$$Z_2\{Z_1\cup\lambda\}Y_1Y_2 \quad\quad Y_2Y_1\{Z_1\cup\lambda\}Z_2$$
和
$$\{Z_1\cup\lambda\}Z_2Y_1Y_2 \quad\quad Y_2Y_1Z_2\{Z_1\cup\lambda\}$$

而类型 4 的可能排序可以从以下 4 个子集中挑出：

$$Z_2Z_1\{Y_1\cup\lambda\}Y_2 \quad\quad Y_2\{Y_1\cup\lambda\}Z_1Z_2$$
和
$$Z_2Z_1Y_2\{Y_1\cup\lambda\} \quad\quad \{Y_1\cup\lambda\}Y_2Z_1Z_2$$

在类型 2 的任何排序中，Y_2 位于端点位置。所以在类型 4 的排序中，$Z_2Z_1Y_2\{Y_1\cup\lambda\}$ 或它的反序中必定至少有一种排序，以避免二分 $\{Y_2,Y_2^C\}$，其中上标“C”表示“补集”。相反地，为了避免二分 $\{Z_2,Z_2^C\}$，必须挑选 $\{Z_1\cup\lambda\}Z_2Y_1Y_2$ 或它的反序。

将这两个排序集称为 α 和 β。现设 y_1 是集合 α 中的一个排序的端点，z_1 是集合 β 中的一个排序的端点，且 $y_2\in Y_2$，$z_2\in Z_2$；这样，这个侧面必定是如下 4 个子侧面中的一个：

$$z_2z_1y_2\lambda y_1, \quad z_1\lambda z_2y_1y_2;$$
$$z_2z_1y_2\lambda y_1, \quad y_2y_1z_2\lambda z_1;$$
$$y_1\lambda y_2z_1z_2, \quad z_1\lambda z_2y_1y_2;$$
$$y_1\lambda y_2z_1z_2, \quad y_2y_1z_2\lambda z_1。$$

在第一个情形，侧面 K 是 $z_2z_1y_2\lambda$，　$z_1\lambda z_2y_2$；

在第二个情形，侧面 K 是 $y_2z_2\lambda z_1$，　$z_2z_1y_2\lambda$；

在第三个情形，侧面 K 是 $z_1\lambda z_2y_2$，　$\lambda y_2z_1z_2$；

在第四个情形，侧面 K 是 $y_2y_1z_2\lambda$，　$y_1\lambda y_2z_2$。

实际上，基数大于 2 的任何集合，其“客观的”二分在自然界中似乎很少发生——如因纳达条件很少可能发生的那样。而它们真正的功绩可能在于：它们引出了纯代数性质的一些综合条件(非常简单的)，并能得到综合的证明，这些将在下一章中叙

述。

5.3 因纳达条件所许可的多样性程度

还要作一些最后的注解。对此，我们必须判定，就多样性程度而论，NITM 条件是否比单峰和单谷更大。

定理 5.3 在服从二分条件的一个侧面中，不同排序的最大个数为 $2^{|X|-1}$。

证明归纳法：当 $|X|=2$ 时，这个结果是显然的。假定 $|X|=n-1$ 时，这个结果是对的。现若 $|X|=n$，我们知道存在 X 的一个二分 $\{X_1,X_2\}$，使得在一种准则的任何排序中，有 X_1 中所有备择对象前于 X_2 中所有备择对象，或者 X_2 中所有备择对象前于 X_1 中所有备择对象。若 $|X_1|=m$，$|X|=p$，则有 $F(n)=2^{m-1}\times 2^{p-1}\times 2=2^{n-1}$。

定理 5.4 对任意侧面（$|X|=n$），准则允许的不同排序至多有 2^{n-1} 个。但如果该侧面包含 K，则准则允许的不同排序至多有 2^{n-2} 个。

证明：首先要注意的是，在逐步建立服从 NITM 条件的具有 n 个对象的一个侧面的过程中，当一个新的备择对象被加到 Y 中时，在 $E(Y)$ 的每个排序中，它至多有两种不同的位次。

为了证实这是对的，我们作相反的假定，$E(Y)$ 中存在一个排序 θ，其中新备择对象 x 可能以三种不同位次 $i<j<k$ 被引

入。设 y 是 $\theta(Y)$ 中的第 i 个备择对象，z 是第 j 个备择对象，那么 $E(Y+x)$ 将包括：

θ_1，使 x 排在 y 前，y 排在 z 前

θ_2，使 y 排在 x 前，x 排在 z 前

θ_3，使 y 排在 z 前，z 排在 x 前

这是不可能的，因为如果这样，三元组 $\{x,y,z\}$ 将不再服从 NITM 条件。

现假设 E 包含 K，或更精确地说，E 包含有 4 个备择对象 $\{a,b,c,d\}$ 与排序 $abcd$ 和 $bdac$。有没有其他排序能加入其中，而不会打破 NITM 条件呢？这些附加的排序将不得不服从以下四个限制：

$\{a,b,c\}$ 中，c 从不居中

$\{a,b,d\}$ 中，a 从不居中

$\{a,c,d\}$ 中，d 从不居中

$\{b,c,d\}$ 中，b 从不居中

只要简单枚举所有各种可能，就可以使读者直接得到 $dcba$ 和 $cadb$。下面这四个排序（能写成一个对称矩阵），构成了包括 4 个对象的、既满足 NITM 条件又包含 K 的最大侧面：

$abcd$

$bdac$

$cadb$

$dcba$

显然，满足这两个条件的 $F(4)$ 等于 2^2。将一个新备择对象加到第一个侧面——比如，在每个序的端点。容易看到，这将产生一个关于 5 个对象的侧面，它满足 NITM 条件，包含侧面 K 且具最大的不同排序数。通过迭代，当然可以得到 $F(n)=2^{n-2}$。当一个侧面服从二分条件时，我们知道 $F(n)=2^{n-1}$。因为 NITM 条

件意味着两种互斥的可能状况中的一种，所以这个定理的证明也就完成了。

本章的结论是，关于三元组的阿罗—布莱克条件和因纳达条件，在属于单个侧面的排序方面，不可能比看上去更具限制性的 C_{ij}条件，有更丰富的多样性。比如，一个团体采用受控多数的投票步骤，如要求其中所有成员遵从受控多数方法可传递性的一些特殊条件。另外，再假定每个成员的投票是有限的备择对象集合上的一个线性排序，那么，允许一个成员投的不同票的最大数目与无约束下总的投票数之间的比率，可以作为对这个条件所许可的有效个体自由程度的一种度量。这样，我们最后可以得出结论，仅就三元组而言，传递性条件(阿罗—布莱克条件和因纳达条件)并不比 C_{ij}条件产生更多的个体自由。

6 值限制条件实际上是怎样限制的？

我们的研究已进展到足以指出，为确保受控多数方法的可传递性——从决策者的观点来看，方法要成功就必须有传递性，对侧面应作多强的限制。为了使这些限制精确化，我们仍将公理方法继续下去；决策学家或许会认为，更多的公理应加到我们的三个公理中——可惜其中的两个公理就足以证明，就我们的决策目的来说，这种受控多数方法是失败的。这些公理所提的松散要求，出奇地严格限制了所许可的侧面。

本章以讨论我们的三个非常“宽容的”公理作为开端，并将显示，服从这些公理的所有条件，必定是森(Sen)的值限制条件的特例(森，1966)。在第二部分里，将导出取值限制条件下 $F(n)$ 的上界并将讨论其后果。

6.1 值限制条件

6.1.1 寻找合理的限制公理

基于第Ⅰ部分所谈的心理学考虑，现在我们可以用合理的数学表达式来概括限制条件了。我们已经充分强调了真实问题中的模糊性：如团体决策一样，备择对象和准则的集合都从来没有很好地被定义和限定过。因而，数学上相互独立的两个要求，就显得不可缺少了。

公理 6.1(备择对象的稳健性) 对可接受的侧面集合的限制必定是这样的：如果 $E(X)$ 是一个可接受的侧面，那么对任意 $Y \subset X$，$E(Y)$ 是可接受的一个子侧面。换言之，消去或增加备择对象都不应该改变先前所得的可传递性。当然，这个公理看起来有点奇怪，像是对无关备择对象的独立性，但很明显，这里没有一个备择对象是不相干的：如果用 $M(E)$ 来代表受控多数方法运用于一侧面 E 所得的结果，则 $M(E(X))$ 仅 Y 中备择对象的限制会与 $M(E(Y))$ 不同。在大多数重要的例子里，这是不会发生的：**对于可导出传递性结论的一个侧面**，不相干备择对象的独立性是满足的。

我们还可以附注一句，公理 6.1 摒弃了许多有名的条件，如布林(Blin)的多维相容性(1973)等。

公理 6.2(准则的稳健性) 对允许的侧面集合的限制应该

是这样的:如果 $E(X)$是一个允许侧面,那么,通过消去任意个准则所得的 $E(X)$的子侧面 $E'(X)$还是一个允许侧面。当然,“任意个”的意思是,如果有必要的话,在这任意个准则上,允许加上或减去一个准则(为了最终达到奇数个准则)。

6.1.2 一个基本的结论

定义 6.1(森,1966) 如果对一个侧面中任何未排好序的备择对象三元组 T,总存在一个备择对象 x 和一个序位 $k\in\{1,2,3\}$,使得在 $E(T)$中,x 从不会排在第 k 位,则称这个侧面服从取值限制条件。

定义 6.2[瓦尔德(Ward),1965] 如果一个侧面不包含孔多塞三元组,即不包含备择对象三元组$\{a,b,c\}$和准则三元组$\{\theta_a,\theta_b,\theta_c\}$,使得

$$\theta_a\{a,b,c\} = a,b,c$$
$$\theta_b\{a,b,c\} = b,c,a$$
$$\theta_c\{a,b,c\} = c,a,b$$

那么,称这个侧面服从瓦尔德条件。

定义 6.3(瓦尔德,1965) 瓦尔德条件的一个等价定义是:如果不存在一个对(Y,θ),其中 $Y\subset X$,$|Y|\geqslant 3$,$Y=\{y_1,\cdots,y_r\}$,θ 是一个准则序列 $\theta_{y_1},\cdots,\theta_{y_r}$,使得:

$$\theta_{y_1}(Y) = y_1y_2,\cdots,y_{r-1}y_r$$
$$\theta_{y_2}(Y) = y_2y_3,\cdots,y_ry_1$$
$$\cdots$$
$$\theta_{y_r}(Y) = y_ry_1,\cdots,y_{r-2}y_{r-1}$$

那么,称 E 服从瓦尔德条件。

引理 6.1 定义 6.2 和 6.3 是等价的。

证明：如果 E 服从定义 6.3，则 E 明显不包含任何孔多塞三元组。相反地，假定 E 不包含孔多塞三元组，但存在 $Y\subset X$，$Y=\{y_1,\cdots,y_r\}$，$r>3$，和 E 的一个中准则序列 $\theta_{y_1},\cdots,\theta_{y_r}$，使得：

$$\theta_{y_1}(Y)=y_1,\cdots,y_{r-1}y_r$$

$$\theta_{y_2}(Y)=y_2,\cdots,y_ry_1$$

$$\cdots$$

$$\theta_{y_r}(Y)=y_ry_1,\cdots,y_{r-1}$$

这是不可能的，因为 $T=\{y_1,y_2,y_3\}$ 明显会产生一个孔多塞三元组，如：

$$\theta_{y_1}(T)=y_1,y_2,y_3$$

$$\theta_{y_2}(T)=y_2,y_3,y_1$$

$$\theta_{y_3}(T)=y_3,y_1,y_2$$

定理 6.1 一个侧面服从瓦尔德条件的充要条件是它服从某个取值限制条件。

证明：设 $T=\{a,b,c\}$ 是备择对象的一个三元组。如果它是一个孔多塞三元组，则存在 3 个准则 $\theta_a,\theta_b,\theta_c$，使得 $\theta_a(T)=abc$，$\theta_b(T)=bca$，$\theta_c(T)=cab$。这三个备择对象 a，b，c 中的任何一个，将位于第 1，2，3 位置中的任一个，则值限制条件不成立。于是，若 E 服从取值限制条件，则它也服从瓦尔德条件。

现假定 E 服从瓦尔德条件，考虑任一三元组 $\{abc\}$。这三个备择对象的 6 个序都是先验可能的：abc，bca，cab，acb，cba，bac。

当 E 服从瓦尔德条件时,前三个序中至少有一个、后三个序中有一个是被禁止的。

通过简单枚举,就可以验证,这 9 种情况与 T 的 9 个可能的取值限制条件是一一对应的。

定理 6.2 满足公理 6.1 和公理 6.2 的所有 CTMMs,都是取值限制条件的特例,反之亦真。

证明:设 C 是满足这两个公理的一个条件,E 是满足 C 的任一个侧面。设 $\{a,b,c\}$ 是备择对象的任一三元组,$\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$ 是准则的任一三元组。因为 C 服从公理 6.1 和 6.2,所以该子侧面服从条件 C,且在受控多数方法下,还可以导出一个传递性的结果。只有当所考虑的子侧面不是一个孔多塞三元组时,这个结论才有可能,因而 E 满足瓦尔德条件。

相反地,如果 E 服从瓦尔德条件,则它的任何子侧面显然仍服从瓦尔德条件。而满足瓦尔德条件就是满足取值限制条件,这个证明至此完成。

注 1:直到现在,能确保受控多数方法可传递性的条件都包含于瓦尔德条件。甚至可以说,对每个三元组,它们只是使以下问题或多或少地更具体化了一些:对象是否有一个禁止的序或某种序是否是禁止的。

注 2:在商业公司里,不同的准则专家按其准则独立对备择对象排序。

这样,在不知道其他专家所作的排序下,为了能排列这些备择对象,每个专家必须知道准确的被禁止排序清单。

换言之，如果我们想将某个特定值限制条件应用于一个工业问题，则相应限制集合就必定是先验形成的，而不是后验的。

6.2 受控多数方法的失败

当然，在瓦尔德条件的情况中，$F(n)$的计算是一个有趣的挑战。就我们所知，这个难题到现在已有20年了，但似乎还不能解决。尽管如此，我们已经知道一些关于$F(n)$确定的结论。

$F(3)=4$：第五个序将总能被放进一个拉丁方阵中，这个拉丁方阵中有前4个序中的2个序。通过单纯的枚举（拉瑞德，1982），很容易得到$F(4)=9$，这比$2^{n-1}=8$多。但4个备择对象能有9个不同的排序且没有孔多塞三元组，这样的侧面是非常稀少的：大约是1/50000。容易看出，一般地，$F(n)>2^{n-1}$，这是因为在拉瑞德所引用的具有4个备择对象的任何侧面中，通过将新备择对象依次简单地加到每个排序的两个端点上，就可以衍生出满足5个备择对象的一个侧面。于是，$F(4+i)\geqslant 9\times 2i$。如果$n=4+i$，那么，$F(n)>2^{i+3}=2^{n-1}$，让我们来看一看这个问题未解决部分有多大啊！

阿比洛（J. Abello）目前正试图证明，当$n\geqslant 4$时，$F(n)<2^n$。他目前的部分结果是支持这个重大的猜测的（阿比洛，1981，1985）。实际上，我们的结论可以由更宽松但非常容易得到的$F(n)$上界中得出。这一上界在某些方面确认了克拉默论文（Kramer，1973，1976）得出的结果。

定理6.3 如果E是服从瓦尔德条件的一侧面，则有$F(n)\leqslant 2\times(n-1)!$。

证明：由一系列$(n-1)!$个循环矩阵，可以得到n个备择对象的$n!$个不同排列所构成的集合，每一个矩阵的每一行可以从上一行循环置换得到。每一个循环矩阵的第一行都会以相同的备择对象，比如说x_1开始，而第一行的其余部分会是$(n-1)$个剩余备择对象的$(n-1)!$个不同排列中的某一个。

现考虑其中一个循环矩阵，例如，如果$X=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$，则在这个系列中的第一个矩阵会是：

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{matrix}$$

由于瓦尔德条件，在这样给出的n个排序中，包含于E_n中的排序不会多于2个：如果它包含3个排序，例如，行p,g,r；$p<g<r$，那么x_p、x_g，x_r和行p,g,r会形成孔多塞三元组。

于是，E_n不可能包含大于$2(n-1)!$个不同排序。

因为受限制序的数目与无限制序的数目之比$f(n)$，仍小于$2/n$、所以可以说，当n无限增大时，对每个准则来说，允许的排序比例至少是以$2/n$趋向于0。

这明显意味着，除准则（体系本身）有极强的约束模式外，准则的允许排序也会限制受控多数方法，这些限制会使其在我们的工业问题中无法应用。

结　　论

请从这种受控多数方法及其传递性的条件中走出来！但不会太久。就像从门口走出这座房子，再从窗子进入。

由于前面细述的种种原因，你可能会认为，应该使用受控多数方法，而且这种受控多数方法无论何时都“有用”，即它可给出一个可用的结论。但这必然会导出那些不理想的非传递性，也就是说：仅对两个备择对象作选择时，这种受控多数方法是适用的。在此方向上已无法再作进一步的研究了。

对归并算法的最高要求是其符合孔多塞要求。

定义 1　设 $x \in Y \subset X$；x 是 Y 中的**一孔多塞**(Condorcet)**型赢者**，是指对于 $\forall y \in Y$，$y \neq x$，对多数准则认为 x 优于 y。

定义 2　关于多准则排序的一种归并算法被称为孔多塞型是指，在每一步挑选时，只要备择对象集中存在孔多塞型赢者，就选它为下一个。

不赞成孔多塞方法的人显然会对这种方法进行诸多攻击。还有其他可应用于整个侧面，且其结果具有传递性的受控多数

决策方法，但任何孔多塞方法显然都具有这种属性，如果用频率概念表示孔多塞方法在其中的重要性，那么该频率值显然与孔多塞赢者的出现概率紧密联系，且应认为其对不同侧面的这种概率分布是均匀的。当备择对象的个数 n 增加时，这个出现概率的大小可以用尼埃米(Niemi)和韦伯(Weisberg)提出的极值方法计算(准则数目为无穷大奇数时的极限)。

备择对象的个数	孔多塞赢者的频率
3	0.9123
4	0.8245
5	0.7487
6	0.6848
7	0.6308
8	0.5849
9	0.5455
10	0.5113

10个备择对象(即 $n=10$)在工业例子中被认为是一个常用值。尽管用于整个侧面的受控多数方法也许会导出无传递性的结果，但在实际操作中，仍非常有可能成批地摒弃孔多塞赢者。对部分备选项使用受控多数方法决不仅具有理论意义。相反地，探寻可应用于更复杂侧面的有效算法，是一个开阔的研究领域。这些方法必定会推广受控多数方法，而且在应用于不精确的侧面时，它们满足更少要求的公理系统。

第Ⅲ部分的主题是对这些方法作甄别和评价。

第 Ⅲ 部 分



引　　言

现在，我们的目的是甄别多准则排序方法，这些方法是对纯有序资料定义的，要是受控多数方法也适用于这些资料的话，可以得出两类方法是一致的结论。另外，受控多数方法中的出现循环多数而致无法对备选项排序的问题，在多准则排序方法中也会存在。

对这个问题，我们将提出一个新的公理系统，以得出一些令人满意的解。我们先一起来回顾一下，为了将这个概念从其他多准则问题中分离出来，我们将论及多准则优序问题（分别为：公理、方法、算法）。从阿罗的公理系统中，可以汲取：

公理 7.1（多样性公理）　每个准则都是关于一个有限备择对象集合 X 的总排列，且准则不受限制，它对 x 可任意排列；解处处都有定义。该方法必须对任意数据集指明其排列（如果必要的话，准则的数目 $|E|$，可以假定为奇数）。

接着，我们需要一个标准化的对等性公理，它看上去像梅（May）公理，它使对资料的有序限制更精确化：

公理 7.2（对等性）　所有对象和所有准则都被平等地对

待,但由于准则被认为各自拥有无法比较的度量标准,所以它们所提供的惟一信息是它们有成对比较的偏好。

对工业决策很希望有一个正向反应的公理。许多方式都有可比较的结果。我们提出最便于证明的一个:

公理 7.3 主动响应(或积极响应) 两个备择对象 x_i 和 x_j 之间的偏好强度是一个严格递增的函数,它随着将 x_i 排在 x_j 前的准则的个数的增加而增大。

用 a_{ij} 来代表在侧面 E 上将 x_i 排在 x_j 前的准则的个数。矩阵 $A=[a_{ij}]$ 被称为相应侧面 E 的**优序矩阵**,矩阵的系数被称为**优序系数**。因为它是代表成对比较偏好强度的最简单的基数效用函数,如果没有其他的,它就是我们将使用的。这只是我们至今仍在使用的模型对更复杂情况的一个变种。我们认为,在这个非常简单的、易于应用的模型中,其大部分特性是已知或易知的。

优序矩阵有一个漂亮的特性,我们称之为"常和"特性:存在一个数 N(这里,$N=|E|$),使对任何 (i,j),都有 $a_{ij}+a_{ji}=N$。换言之,$[N-a_{ij}]=[a_{ij}]'$。已经证明,这个特性具有很大的实用价值,虽然在复杂的实例中,该假定不得不稍稍放宽。当然,非优序矩阵也能持有这个"常和"特性。

7 优序公理

适用于工业问题的多准则排序的算法(为简化,自此以后称为优序方法),需要附加公理才能导出。这些构成了本章的内容,它由两个不同部分组成:第一部分是序贯独立性公理;第二部分是科赫勒(Kőhloer)公理。

7.1 序贯独立性公理

由菲什伯恩(1973)定义的抉择函数是这样一种方法,它能从一个有限大的集合中分出由最优对象构成的子集,或者在更有利情况下找出最优对象。一个多准则优序的构建就在于使用这种抉择函数逐次分割子侧面。

换言之,在这个算法的第 p 步,我们有 p 个已排好序的备择对象等价类,现想增加这个分级的判别力,第 p 步会将该抉择函数应用于等价备择对象组之一;但用于这个抉择函数的信息,将受制于优序矩阵对优序系数的约束,优序系数是这些备择对象两两之间的对比偏好所对应的值。这只是描述了所要求的独立性的"类型"。

序贯独立性原则

(1) 排序是通过逐步的过程获得的,每一步都是将一组等价备择对象拆分成两个:一个主控的非空集合,一个组内被控备择对象的非空集合。

(2) 在每一步中,相关数据受制于给定侧面仅对将要被分割的备择对象子集的约束。

由此可知,该过程有三种类型。假定,对所考虑侧面的一个类来说,存在一个抉择函数,对任意备择对象集中的元素,总能指出一个惟一最好的备择对象(在不分胜负时,选择将随意进行,有几个不分胜负的,就有几个最好的)。团体对候选者排序时,通常喜欢首先展示最好的候选者,接着考虑次好的,依此类推,当要求决议无争诤时,尤其如此。从剩余备择对象中,逐步检出最好备择对象,这种排序类型被称为**递减排序**。被称为**递增排序**的一个类似程序是以消去最差备择对象为开始,接着继续消去剩余备择对象中最差的,依此类推。

数学家会反对这样一个逐步的优序算法:排序过程越深入,由于可获信息的逐步枯竭而造成这种排序出错的风险就越高。在我们的模型里,这个争论被认为是无效的:假定由于预算和人力的限制,要求决策者只排出 p 个最好的备择对象(或只需淘汰 p 个最差的备择对象)。因为第 p 个后面的(或前面的)备择对象被排除,理论上,决策者就不用再过分关心有关它们的确切相对次序的问题。在我们的公理系统里,假定他最关心的是一个规则,它能使 p 个最好(或最坏)备择对象排序的改变,不引起剩余备择对象排序的改变;如果由于外部因素,有关已入选备择对象的信息发生了改变,可认为对下一个备择对象的选择只取决于侧面对剩余备择对象的限制。

另一个公理会使另一种二分分割序列更精确，它能导出所要排列。在这种情况下，该争论当然会有另一种性质，在下节的一个例子对此将作更深入的讨论。

前三个公理都假定，所有可得信息都包含在优序矩阵中。于是，在第 p 步，任何具有序贯独立性的优序方法，都可应用于备择对象等价类的有序集合。这样，就有可能由数值函数的定义来使方法形式化，这个数值函数定义于前次分割形成的集合，称为**评价函数**。为了计算这个函数，我们仅需要一个系数子集称为**评价集**（是优序矩阵在新的拆分要考虑的备择对象集合上的限制）。

当然，遇到的第一个问题会是：有没有“天然的”评价集？备择对象的排序过程可以从两个对立的观点来考虑：主控和受控。在我们的数据中，备择对象 x_p 对其他备择对象的主控是通过优序矩阵第 p 行的系数来反映的，而备择对象 x_p 对其他备择对象的受控是通过优序矩阵第 p 列的系数来反映的。显然，对两个不同分割的评价一般是不独立的，即使考察的是不相交的对象集合。既然在一些有名的归并方法中，评价集等同于整个矩阵系数集合，那么一个评价集系数的改变必会影响到另一个评价集的系数。

决策实践证实了序贯独立性的三个不同公理：

公理 7.4 I（递减的序贯独立性）

（1）排序是通过一个逐步的过程获得的，每一步都是从尚未排好的备择对象中挑出最好的一个，那些未中选的备择对象被视为是劣于先前选出的备择对象。

（2）在每一步中，识别最好元素所需的有关资料，都包含在给定侧面对该步时尚未排好序的备择对象子集的约束中。

公理 7.4Ⅱ(递增序贯独立性)

(1) 排序是通过一个逐步的过程获得的，每一步都是从尚未排好的备择对象中挑出最差的一个，那些未中选的备择对象被视为是优于先前选出的备择对象。

(2) 在每一步中，挑出最差元素所需的有关资料，都包含在给定侧面对该步尚未排好序的备择对象子集的约束中。

公理 7.4Ⅲ(二分序贯独立性)

(1) 排序是一个逐步的过程，每一步都是对等价备择对象组的一次二分，将其分成主控备择对象集和受控备择对象集，自此以后，第一集合的所有备择对象被视为优于第二集合的所有备择对象。

(2) 在每一步中，有关资料都包含在给定侧面对该步尚待区分两类的备择对象的约束中。

这些公理都具有直接的推论。现认为所有优序方法都满足公理 7.1、公理 7.2、公理 7.3、公理 7.1 I (递减序贯独立性)。假定，这种方法挑选出的第一个备择对象是 x_1。由公理 7.2 和 7.3 公理可知，所有信息都包含在优序矩阵中。由公理 7.2(对称性)可知，任何别的侧面，只要其中的备择对象的排序与 $\{x_2,\cdots,x_n\}$ 的排序相同，它就会将 x_1 作为首选的备择对象。这些排列是怎样影响优序矩阵的呢？这很简单：优序矩阵中的系数仅根据 $\{x_2,\cdots,x_n\}$ 的排序变换作位置调整，第一行和第一列也同样如此。在消去第一行和第一列后的剩余优序矩阵中，即在下一步运算的当前优序矩阵中，所有系数都根据准则对 $\{x_2,\cdots,x_n\}$ 的排序形成的相对的位置所决定，对 x_1 的选择不会产生影响(这是对等

性公理所决定的），所以，为挑选 x_1 所作的分割，其评价函数仅被看成是关于行 1 和列 1 的一个函数。还有，由于“常和”特性，这样一个函数可以看做仅是列或行系数的一个函数。这就得出了如下有用的性质：

引理 7.1 对服从公理 7.1～7.4 Ⅰ（或 7.4 Ⅱ）的一个优序方法而言，在每一当前步中，为挑选出最好（或最差）备择对象所作的分割，其评价函数是对应于优序矩阵中的备择对象的行（或列）系数的一个对称函数。

当然，公理 7.4 Ⅲ 的等价性不太明了。就我们所知，格勒诺布尔（Grenoble）大学应用数学系的德博尔（B. Debord），目前正在对此作研究。我们对服从公理 7.4 Ⅰ 和 7.4 Ⅱ 的优序方法有特殊兴趣，是由于这些方法与某种逻辑的工业行为有相似性：如果要从一个多元素集中挑选出少数最好的备择对象，自然会用这种单纯的比较优势方法（这样，其评价集将是当前优序矩阵的各行），这种方法为最优元素的选择提供了最多的信息；相反地，如果要从一个多元素集中挑选出少数最差的备择对象，自然会用这种单纯的比较劣势方法（这样，其评价集将是当前优序矩阵的各列）。

前四个公理的这三种不同版本，摒弃了许多现行方法。

定理 7.1 前四个公理的这三种不同版本中的任意一种都否定了博尔达（Borda）方法。

证明：回忆一下，博尔达方法（1781）相当于是用备择对象的秩（名次）的总和，作为 X 的一个基数效用函数。近来，它已被认

为是与团体决策有关的公理系统的惟一解。例见杨(Yang,1974,1975)和史密斯(Smith,1973)。考虑 $X=\{a,b,c,d\}$ 上的侧面,它有如下 5 个排序:*abcd*,*bcda*,*cdab*,*dabc* 和 *dcba*,优序矩阵是:

$$\begin{matrix} . & 3 & 2 & 1 \\ 2 & . & 3 & 2 \\ 3 & 2 & . & 3 \\ 4 & 3 & 2 & . \end{matrix}$$

将博尔达方法应用于这个例子,可以得出惟一解 *dcba*。如根据包括公理 7.4 I (递减序贯独立性)的公理体系,对前两个对象的逐步选择仍将是 d 和 c。优序矩阵指出,三个准则喜欢 a、不喜欢 b,而另两个准则正相反。这样,这个序贯的步骤就产生 *dcab*。

包括公理 7.4 Ⅱ (递增序贯独立性)的公理体系中也有类似的争论:一旦 b 和 a 被排斥,就只剩 c 和 d 有待排序了;但优序矩阵指示出,3∶2 的准则喜欢 c 而不喜欢 d。

根据第三个公理体系,必定会进到某一步,在这一步中,不得不独立("独立"指无信息)对有序备择对象对 $\{d,c\}$、$\{a,b\}$ 和 $\{c,b\}$ 排序。前两种情形已证实其不可能性;最后一对的情况也一样,因为 3∶2 准则喜欢 b 而不喜欢 c。

7.2 科赫勒公理

我们现在要讨论的许多性质,在科赫勒的论文(1978)中,是以一种不太明确的形式出现的。为了得到比孔多塞型更精确的

公理，我们使用了这些结果。在本章的引言中，我们已指明，当受控多数方法导致无传递性时，有必要通过合理地放宽约束条件来得出一个受控多数决策方法。我们知道，这种受控多数方法一般不适用于我们的资料。克拉默(Kramer，1977)讨论了某种相似的结果。他的主题在于政治过程中的平衡，因而本质上是描述性的，但他也为社会抉择理论作出了一些启示。用 R_{g+1}来代表他的建议。这种内容是不同的，因为克拉默假定备择对象形成了一个多维连续系统，且随着个体理想备择对象与选定备择对象之间的距离增加，该个体的偏好程度是减少的。

科赫勒作硕士论文时，直觉上就已有了“科赫勒”法，早在1976年，他就曾对此作过口述。那时，他正感兴趣于一个热门课题“α－受控多数”[例见格雷文(Craven，1971)，弗瑞琼(Ferejohn)和格雷瑟(Grether，1974)]。这表示在 X 的一个侧面上的二元关系 R_α，它是通过对备择对象对(x_i,x_j)的选择得到的，它能使至少 α 个准则将 x_i 排得比 x_j 好。这样，α 和优序系数都是整数，而 N 是奇数。不需任何特殊限制，这些性质适用于整数系数的任何非负方阵 $A=[a_{ij}]$，并就某个 N，证明其有“常和”特性(简言之，只讨论常和矩阵)；α 可为任何正实数，当且仅当 $a_{ij}\geqslant\alpha$，关系 R_α 包含(x_i,x_j)。

当 α 等于 0 时，R_α 是对等的、完备的；当 α 足够小时，R_α 必定包含一个全序。如果矩阵 A 对应于全体一致的一侧面，即如果所有准则都赞同一个全序 O，则对任一 α，R_α 等同于这一全序。对任何有异议的侧面，存在一足够小的 α(例如为 1)，使得 R_α 包含侧面中每个准则所表达的序，科赫勒感兴趣的是 $\bar{\alpha}$，即，使得 R_α 仍包含一个全序的最大 α。我们知道，如果$|X|$和$|E|$增大，$R_{|E|/2}$包含一个全序的概率递减趋向于 0，因为 $R_{|E|/2}$很可能包含一个循环序且是完备的。这就是为什么在同样条件下 $\bar{\alpha}$ 小

于$|E|/2$的概率趋向于1的原因。

现在，让我们考虑$R_{\beta+1}$。当$\beta=N$时，$R_{\beta+1}$为空，这样，$R_{\beta+1}$就没有循环序。当β从N向0递减时，$R_{\beta+1}$以没有循环序开始；那么，对某个$\underline{\beta}$，$R_{\underline{\beta}+1}$将会是最后的无循环序关系，对$R_{\underline{\beta}-p}$，$p\geqslant 0$，它至少包含一个循环序。如果A是从X的N个全序中得到的，且受控多数方法不会造成无传递性，则$\underline{\beta}$是小于$\bar{\alpha}$的。实际上，因为$R_{|E|/2}$是无循环序的，而$R_{\underline{\beta}}$不是，所以$\underline{\beta}$显然与小于$|E|/2$的最大a_{ij}相等。相似地，因为$R_{|E|/2}$包含一个全序，假定等于$R_{\bar{\alpha}}$，且$R_{\bar{\alpha}+1}$不再是一个具有完备性的关系，所以$\bar{\alpha}$与大于$|E|/2$的最小α_{ij}相等。这样，$\underline{\beta}$比$\bar{\alpha}$要小。

但我们知道，对于大量备择对象和准则，从统计角度讲，这种情况不会发生。由于这个原因，实际上我们今后认为，$\bar{\alpha}$总比$\underline{\beta}$要小，且总假定$R_{\bar{\alpha}}$包含一个全序，$R_{\underline{\beta}+1}$无循环序。我们现将见到，两个关系$R_{\bar{\alpha}}$和$R_{\underline{\beta}+1}$的联系，是非常紧密的。

定理7.2（科赫勒，1978）　α和β代表正实数，又$\alpha+\beta=N$，那么，当且仅当$R_{\beta+1}$中没有循环序，R_{α}才会包含一个全序。

证明：(1) $(j,i)\notin R_{\beta+1}\Leftrightarrow(i,j)\in R_{\alpha}$。如果$(j,i)\notin R_{\beta+1}$，则$a_{ij}<\beta+1$，那么，由于$a_{ij}=N-a_{ij}$，所以$a_{ij}>\alpha-1$。这样，就有$a_{ij}\geqslant\alpha$，且$(i,j)\in R_{\alpha}$。相反地，如果$(i,j)\in R_{\alpha}$，则由于$a_{ji}=N-a_{ij}$，$a_{ji}\leqslant N-\alpha=\beta$，$a_{ji}<\beta+1$；这样，就有$(j,i)\notin R_{\beta+1}$。

(2) 如果$R_{\beta+1}$不包含循环序，考虑拓展$R_{\beta+1}$的任何一个全序O。如果$(i,j)\in O$不在$R_{\beta+1}$内，(j,i)就不可能在$R_{\beta+1}$内；否则，O将包含一个循环序。因为$R_{\beta+1}$无循环序，所以，如果(i,j)在$R_{\beta+1}$内，(j,i)就必定不在$R_{\beta+1}$内。这样，如果$(j,i)\in O$，(j,i)就不在$R_{\beta+1}$内，则$(i,j)\in R_{\alpha}$，即所有包含$R_{\beta+1}$的无循环序排列

都在 R_α 内。

(3) 如果 x_1 是 R_α 中一全序 O(如果存在)的第一备择对象，从(1)中可知，没有任何对象在 $R_{\beta+1}$ 中会排在它前面。设 x_2 是 O 中的第二对象，则除了 x_1 外，没有其他对象在 $R_{\beta+1}$ 中能排在它前面，依此类推。于是，$R_{\beta+1}$ 中必定不含循环序。

定理 7.3(科赫勒,1978)　如果 $\bar{\alpha}$ 是使 R_α 包含一个全序的最大值，而 $\underline{\beta}$ 是使 $R_{\beta+1}$ 不包含一个循环序的最小值，那么，$\bar{\alpha}+\underline{\beta}=N$。

证明：当 α 从 0 增加到 $\bar{\alpha}$ 时，从先前定理中可知，$\beta=N-\bar{\alpha}$ 是一个限，使得 $R_{\beta+1}$ 不包含循环序。当 β 从 N 递减到 $\underline{\beta}$ 时，$\alpha=N-\underline{\beta}$ 是一个限，使得 R_α 包含一个全序。因此，$N-\alpha\leqslant\underline{\beta}$，$N-\beta\geqslant\bar{\alpha}$。因为在这两个限制值处，$N-\bar{\alpha}\leqslant\underline{\beta}$，$N-\underline{\beta}\geqslant\bar{\alpha}$ 都成立，由此得出 $N=\bar{\alpha}+\underline{\beta}$。

理论上决策者会是一个保守的人。他感兴趣于可能存在的最不敏感的优序。对这种敏感度的合理度量有多种方式，但考虑不满意多准则排序的人最常用的批驳模式会对我们有所助益。在工业问题中，如果有人想否定这种优序，他会关注排序中那些最承受不了“合法”批评的点，在这些点上，反驳者会得到最多不赞同者的支持。下面最脆弱的两点不能不被承认：

(1) 存在受绝大多数准则认同，而又不含有投票悖论的两两比较偏好；否定这一点，就意味着绝大多数准则在偏好问题上是无法分割的。只要决策者仍希望其所得偏好序没有循环情况出现，他的多准则排序显然就应该包含 $R_{\underline{\beta}+1}$。

(2) 多准则优序最不重要的两两比较偏好：考虑不属于 R_α

的任何排序 O。它至少包含一个不属于 $R_{\bar{a}}$ 的对 (x_s, x_t)，且 a_{st} 严格小于 $\bar{a}$。为防止攻击这种对，决策者最好的防守是证明其他全排列更差。换言之，多准则排序一旦作出，它就产生一个排列 O，这个关于有限集合的排列，至少包含一对 (x_i, x_j)，使得当 (x_i, x_j) 是 O 的元素时，$\underline{a}_{ij}=\min a_{ij}$。使 $\underline{a}_{ij}$ 尽可能大的排列必定是在 $R_{\bar{a}}$ 内的。

就常和矩阵而言，由包含 $R_{\underline{\beta}}$ 的全排列可得出一个令人吃惊的“常和”结论：

定理 7.4 如果优序矩阵证实了常和特性，那么，正如包含 $R_{\underline{\beta}+1}$ 的任何 O 被 $R_{\bar{a}}$ 包含，包含于 $R_{\bar{a}}$ 的任何 O 也包含 $R_{\underline{\beta}+1}$。

证明：这个结论的第一部分刚才已建立。我们证明了一个甚至比定理 7.3 的证明中更强的结论。包含 $R_{\underline{\beta}+1}$ 的任何无循环序二元关系都被 $R_{\bar{a}}$ 包含，O 仅是一个无循环序二元关系的特例。为了证明定理的第二部分，考虑 $(x_p, x_q)\in R_{\underline{\beta}+1}$，并令 O 是被 $R_{\bar{a}}$ 包含的任何排列。假定 $(x_p, x_q)\notin O$，那么，当 O 是一个全排列时，则 (x_q, x_p) 在 O 中。这样就有 $a_{qp}>\bar{a}$。因为 a_{pq} 被假定为严格大于 $\underline{\beta}$，则 $a_{pq}+a_{qp}>\bar{a}+\underline{\beta}$。但由于“常和”特性，所以有 $a_{pq}+a_{qp}=|E|=\bar{a}+\underline{\beta}$。这个等式与前一个不等式相矛盾。于是，在“常和”情形中，对于一个全序来说，包含 $R_{\underline{\beta}+1}$ 与被 $R_{\bar{a}}$ 包含是等价的。

一般地，可以说：

定义 7.1 由 $R_{\underline{\beta}+1}$ 扩展得到排列 O，其理论基础适用面窄，但可信。

定义 7.2 由 $R_{\hat{a}}$ 缩减得到排列 O，其理论基础适用面宽，但不那么可信。

定义 7.3 如果常和特性成立，如果排列 O 包含 $R_{\beta+1}$ 且被 $R_{\hat{a}}$ 所包含，我们就称其为一个谨慎的优序。

还有，如果常和特性成立，这种综合是不会矛盾的。由于这个原因，在工业例子中提出如下公理就更加合理：

公理 7.5′（谨慎性） 优序方法的解，必定是一个谨慎的排列。

当然，仅使用 $R_{\hat{a}}$ 或 $R_{\beta+1}$ 的条件就可以获得一个具有类似形式的、软弱的公理。

必须注意的是，虽然从纯理论化的公理观点，克拉默（1977）在他论文中没有得出 $R_{\hat{a}}$，他发现了关系 $R_{\beta+1}$ 本身的极强的影响力。和在工业状况下不一样，如果不需要一个总的关系，那么，能够将一个侧面归并为部分 $R_{\beta+1}$ 关系的函数会是一个令人满意的归并函数，它可由对阿罗公理作适当放宽来进行公理化描述。

现回顾一下克梅尼（Kemeny）方法，克梅尼和斯内尔（Snell，1960）已作了充分的表述，该方法被视为一个解，以找出一群专家对备择对象的多数偏好序。那是通过使不同序间的距离平方和最小来解的。这种最小化与优序系数（对应于该排列中的成对比较）和最大化是等价的。利文格利（Levenglick）和杨（1978）证实，这种方法是惟一一种具有孔多塞型和“一致性”特点的方法。如果 X 的两个侧面 E 和 E'，使 $D(E)\cap D(E')\neq\phi$，则 $D(E+E')$

$\bigcap D(E)D\bigcap(E')$ *,那么,称这个抉择函数 D 是一致的。这种“一致性”在政治问题中是有意义的,但似乎不能有效地解释工业问题,它是一个“类似商业的”准则。

就工业实践而论,这个公理似乎可以作如下的直接解释:两个不相交的专家组分别评价相同的备择对象集合。均使用共同的抉择函数来导出一个结论 D 和结论 D'。接着,这个公理要求作一个将两组的单独评价合在一起的步骤,产生一个包含于 $D\bigcap D'$ 的结论。

这种“一致性”准则具有一定的伦理道德内容,因而与社会福利经济和政治学有关。但这里我们的目标是运筹学对商人们的用处。当效益是主要的因素时,我们看不到这种“一致性”准则还会有任何必备的公正性。

实际上,厌恶冲突的决策者对克梅尼方法持强烈的批评态度。

定理 7.5

公理 7.5′摒弃了克梅尼方法。

这只要通过显示一个反例就很容易证明(这个反例,科赫勒在他的文章中是为另一个证明使用的)。$X=\{1,2,3,4,5\}$,侧面包含下列排序:33 个准则指出 5 2 3 4 1;19 个准则指出 1 5 2 3 4;18 个准则指出 4 1 2 3 5;10 个准则指出 4 1 3 5 2;10 个准则指出 1 3 4 5 2;10 个准则指出 3 4 2 1 5;这个侧面产生优序矩阵:

---

* 应为 $D(E+E')=D(E)\bigcap D(E')$。——译者注

XX	57	57	29	67
43	XX	70	52	28
43	30	XX	72	48
71	48	28	XX	48
33	72	52	52	XX

克梅尼解和一个谨慎序是容易计算的。克梅尼的解 41523，所产生的相应的优序系数和为 570。但它包含偏好，"4 优于 3"，对这一偏好只有 28 票同意。相反地，52341 是惟一的谨慎序，它的最弱偏好是"5 优于 1"，有 33 票同意（但优序系数和只是 560）。

实际上，这个谨慎序中，值得关注的另一特性为公理 7.5′ 提供的正当裁决[阿耶尔(M. Ayel)口述的猜测，1982]。设想我们的理论决策者宁愿当一个提示者，一个民主领导，而非一个老板。他不是排序者，却为别的排序者提供帮助。当他不得不作一个困难的排序决策时，他就会召集他的专家们，与他们一起讨论赞同数和反对数，以及得分的波动性。由于出现循环多数，得分波动经常难以中止。

接着，这个决策者必定或多或少强加一些有争议的判别。因为他是一个"民主主义者"，他将乐于以最不致扭曲专家意见集的方式行使他的权力。根据专家们的排序所组成的侧面 E(假定已标准化)，他会使用我们的模型构建一个新的侧面 $E+\omega O$，这是通过将 ω 个准则加到 E 上得到的，这些准则与他个人排序是一致的。

如果他应用这种 ω 值相当大的受控多数决策方法时，那么，他会是一个独裁者。相反地，如果他取一个过小的 ω，则这种受控多数决策规则将无法应用。但存在一个最小的 ω，使得这种受控多数方法，在将 ω 个准则补充于侧面 E 时，能产生一个不

包含循环序的解。更一般地，可令 O 是 X 的一个全序，E 是一个已标准化的侧面，且 $|E|=N$，ω 是与 O 一致的准则，通过 ω 个准则对 E 的补充，得到侧面 $E+\omega O$。

定理 7.5 若用 $M(\Pi)$ 来代表受控多数方法应用于任给的侧面 Π 所得的结果，E 为使 $M(E)$ 无传递性的侧面，又假定 ω 是偶数，而 N 是奇数，那么，在 ω 个准则附加到侧面 E 后，侧面中准则的个数还是奇数：

(1) 若 $M(E+\omega O)$ 中不含循环序，那么就有 $\omega \geqslant \underline{\omega}=\underline{\beta}-\bar{\alpha}+1$。

(2) 对任何 O，$M(E+\underline{\omega}O)$ 被 $R_{\bar{\alpha}}$ 包含。

(3) 如果 O 被 $R_{\bar{\alpha}}$ 包含，则有 $M(E+\underline{\omega}O)=O$。

证明：(1) 如果 $\omega<\underline{\beta}-\bar{\alpha}+1$，且为偶数，那么，对任何 O，$M(E+\omega O)$ 都包含循环序。实际上，因为 $N=\bar{\alpha}+\underline{\beta}$，且为奇数，所以 $\underline{\beta}-\bar{\alpha}+1$ 显然是偶数。$N+\omega$ 小于 $2\underline{\beta}+1$，以致在侧面 $E+\omega O$ 中，$\underline{\beta}$ 个准则形成一个多数。但通过定义可知，$R_{\underline{\beta}}$ 包含循环序，且这个循环序也同样将在 $M(E+\omega O)$ 之中。

(2) 如果 $\omega=\underline{\omega}$，由于 $N+\underline{\omega}=2\underline{\beta}+1$，那么，在 $E+\omega O$ 中的受控多数至少要包含 $\underline{\beta}+1$ 个准则。因此，$(x_p,x_q)\in M(E+\underline{\omega}O)$ 意味着，如果 $(x_p,x_q)\in O$，就有 $a_{pq}+\underline{\omega}>\underline{\beta}+1$，否则就有 $a_{pq}\geqslant \underline{\beta}+1$。在两种情况中，都有 $a_{pq}+\underline{\omega}>\underline{\beta}+1$。从 $\underline{\omega}$ 的定义可知，$a_{pq}\geqslant \bar{\alpha}$，这使得 $(x_p,x_q)\in R_{\bar{\alpha}}$。

(3) 假定 O 是被 $R_{\bar{\alpha}}$ 包含的一个排列，$(x_p,x_q)\in O$，那么，在 $E+\omega O$ 中，$a_{pq}+\underline{\omega}$ 个准则将 x_p 排在 x_q 前。$a_{pq}\geqslant\bar{\alpha}$ 和 $\underline{\omega}=\underline{\beta}-\bar{\alpha}+1$，这事实上意味着，至少有 $(\underline{\beta}+1)$ 个准则喜欢 x_p 超过 x_q，这使 $(x_p,x_q)\in M(E+\omega O)$。这样，$O$ 属于 $M(E+\omega O)$。因为它是非自

反的、完备的，所以 $M(E+\underline{\omega}O)$ 不可能严格地更大，这就有 $O=M(E+\underline{\omega}O)$。

可以看到，即使 O 不在 R_a 内，$M(E+\underline{\omega}O)$ 也可能不包含循环序，但它不会是 O，而会是包含于 R_a 的某种排列。作为一例子，可以考虑侧面 $E=abc,abc,bca,bca,cab$。由此可知 $\underline{\beta}=3$，$\bar{\alpha}=2$ 和 $\underline{\omega}=2$。除了 cb 外，至少有两个准则反对某备择对象优于另一个。这样，R_2 包含所有认同 b 优于 c 的排列，即 abc,bac,bca。接着考虑 acb，它不在 R_2 内。直接计算可得，$M(E+2acb)=abc$，这是一个在 R_2 内的序。

为了导出决定性的解，这个谨慎原则必须服从于基本的逻辑推论。在大部分实际情况中，抉择函数不是挑选出惟一最好的备择对象，而是指出两个集合间的分割，“好”的备择对象集合和“坏”的备择对象集合，这两个集合的大小是可比的。从这一点上来说，如果我们假定整个排序过程将在董事会答辩，那么决策者的弱点是什么呢？显然，如果他的划分，使备择对象 x 属于主控类，备择对象 y 属于受控类，可是喜欢 y 而不喜欢 x 的准则占的比例非常高，那么，他“理所当然地”要被指责。第一类的任何对象优于第二类的任何对象，如这种两两比较偏好是由准则的受控多数表达的，这种情况下，自然会说这种划分是“孔多塞型”的。

现引入的合理公理，应沿着我们已为排序所提出的孔多塞要求的思路归纳。这个公理必定要求，依次作出的每个划分及最终结果，应“尽可能谨慎”。当然，独立性公理应得到满足：如果这种算法必须为备择对象集 Y 作出划分，则侧面对集合 Y 中的备择对象的限制应是惟一要考虑的信息。

自然地，可以对划分的谨慎性作如下定义：设 E 是一集合，

能二分成主控备择对象子集 E'和受控备择对象子集 E''。设 $a(E',E'')$是优序系数中的最小值,该系数是由 E'中的备择对象与 E''中的备择对象决定的。

定义 7.4 集合 E 被二分成主控子集 E'和受控子集 E'',如果对 E 的任意二分子集 F'和 F'',有 $a(F',F'')\leqslant a(E',E'')$,则这种二分称做是"谨慎的"。

现在,可以将谨慎性这一公理以其基本的逻辑形式来表示:

公理 7.5(序贯谨慎性) 如果每一步都是一个谨慎的二分,并且所得结论是一个谨慎的序,那么,序贯优序过程将是序贯谨慎的。

描述一下服从公理 7.4Ⅰ或公理 7.4Ⅱ的情况的实际意义。假定备择对象是从最好到最差排列的。在排序过程的每一步中,排出下一个备择对象也就是为尚未排好(因而是"更差")的备择对象集合决定一个拆分,其要求在于主控子集只包含一个备择对象。假定决策者正在董事会面前表述一个排序,而第 p 个对象在有争议的序中被排在第一位。对它的非议必定集中在包含它的"最弱"偏好上。可是,如果新的拆分使任何别的拆分都显得不好,那么决策者就有最好的辩解:任何别的抉择都将会是更引人非议的。

最后一章是建立满足这些公理的实用方法。

8　优序方法

本章列出了有待解决的问题，它们或许对研究者有所激励：可以以不同方式修正和组合第7章中表达的公理，由此得出解概念的整个适用范围，该解允许相当自由地模拟多种行为，并解决不同问题。除非另外声明，侧面还是由全序组成。优序矩阵的记号仍与以前一样。$A=[a_{ij}]$是侧面E对应的优序矩阵。

在对三个公理系统的特性（公理7.1、公理7.2、公理7.3和公理7.5中共有的）作两个一般性的注解后，我们将完整地识别由第一套公理刻画的优序方法，并为其他问题给出启迪。

8.1　一般性注解

定理8.1　当受控多数方法的应用只限于不会产生无传递性的侧面时，它就满足三个公理系统中的任何一个。

证明：考虑第一公理系统；按照这个系统，中选的第一备择对象，必定是孔多塞赢者。由于常和特性，任何别的抉择都会将一个孔多塞更小的优序系数引入最终的序中，这将不满足公理7.5。第二个中选备择对象是剩余备择对象中的孔多塞赢者，等

等。同样的理由一样适用于第二公理系统。对第三公理系统,很容易理解,对于符合受控多数的任何拆分,所有的优序系数都比它要大,而且任何其他分割都将包含至少一个备择对象对,其系数小于原分割。很明显,只要它们服从受控多数排序,逐次分割将最终达到受控多数的排序。

有待于考察的是,这种受控多数排列是否是对应下述侧面的惟一谨慎序:侧面上所有的优序系数都大于受控多数,任何别的排列至少有一个系数比受控多数要小。

定理 8.2 在这个算法过程中所作的逐次分割,其评价函数不可能是优序系数的和。

证明:第 7 章的例子中,使用了第一公理系统选择第一元素,当惟一谨慎序以 5 开始时,定理 7.5 就会给出 1,作为第一备择对象。按第二公理系统,当 1 是惟一可能解时,最后的对象就有可能是 2 或 3。最后,就第三公理系统来说,二分{1,4}、{2,3,5}对应的系数和为 305,而在服从惟一谨慎解的二分中,"最好的"二分{5,2}、{3,1,4},对应的系数和是 302。这就证明了,如果评价函数等于所选分割的优序系数之和,则惟一谨慎序就不能序贯地得到。

8.2 科赫勒方法

第一公理系统留给这种算法的机会非常有限,也就是说,科赫勒根本上把解概念设想为获得 $\bar{\alpha}$ 的一种快速方法。

算法 8.1［科赫勒的基本算法(1978)］ 第 r 步：从当前矩阵的每一行中，找出最小值 a_{ij}。这些最小值中至少有一个大于其他的。如果有许多相同，则从中随意选出一个。这个最小值所在行对应一个备择对象，这个备择对象在多准则排序中会被排在第 r 位。若 $r<n$，则消去优序矩阵中的相应行和列，以获得第 $(r+1)$ 步的当前优序矩阵。当优序矩阵为空时，这个算法完成。

值得注意的是，这种急切的算法，经过一系列的局部谨慎决策，导出了一个整体的谨慎结果！

定理 8.3［科赫勒(1978)］ 即使常和特性不成立，解也不惟一，科赫勒算法仍产生 $R_{\bar{a}}$ 内的一个序，并且相继的最大值中的最小值等于 $\bar{a}$。

证明：将科赫勒算法应用于优序矩阵 A，能给出至少一个排序 O。行最小系数中的最大值在相继矩阵中的最小值至少对应一个 (r,s) 对，且有 $a_{rs}=\min_{(k,l)\in O'} a_{ij}$。设 O' 是另一序，有 $b=\min_{(i,j)\in O'} a_{ij}$。设 Y 是 O 中在 x_r 以后的集合。在 O' 中，如果 x_r 排在 Y 的元素前，这意味着，对 Y 中的 x_s，有 $(x_r, x_s)\in O'$。这样，$b\leqslant a_{rs}$。

在 O' 中，如果 x_r 不排在 Y 的元素前，而是排在 y 后，y 是 Y 中的元素，是 $(Y+x_r)$ 中的第一位元素。设用 $O'(Y+x_r)$ 来代表 O' 对 $Y+x_r$ 中元素的限制：*

$$b=\min_{(i,j)\in O'} a_{ij}\leqslant \min_{(i,j)\in O'(Y+x_r)} a_{ij}{}^{*}$$

* 原书此处错印为 $Y+Z_r$，$O'(X+Y_r)$。——译者注

即它依其自身次序小于或等于子矩阵中 y 所在行中最小的 a_{ij}，子矩阵由 $(Y+x_r)$ 中的备择对象组成。这是因为，当它应用于同样的子矩阵时，算法选择另一行。相应地，这最后的最小值小于或等于 a_{r_i}，这样也就等于 $\bar{\alpha}$。

显然，按列进行的对偶算法，可以描述如下：

算法 8.2（科赫勒对偶算法） 第 r 步：按当前优序矩阵的每一列，找出最大值 a_{ij}。这些最大值中至少有一个比其余的要小。如果有许多相同，则随意挑选出其中一个。这个最大值所在列对应一备择对象，这个备择对象在多准则排序中将排在第 r 位。如算法 8.1 所进行的，当优序矩阵为空时，算法中止。

定理 8.4 即使常和特性不成立，解也不惟一，科赫勒对偶算法仍产生在 $R_{\underline{\beta}+1}$ 内的一个序，且逐次最小值中的最大值等于 $\underline{\beta}$。

提示：如果成对偏好的集合无循环序，则它含于一全排列中。找出最大的 $R_{\beta+1}$，当然与找出 $R_{\underline{\beta}+1}$ 等价。如果找到一个排列 O，使当 O 变化时，在主对角线下出现最大系数的可能性最小，那么，所有具有较大优序系数的对都是 $R_{\underline{\beta}+1}$ 的元素，而别的对都不能是，否则，优序关系将至少包含一个循环序。

毫无疑问，读者通过类似证明，就可以为逐次消去的算法获得相似结果。

8.3 阿罗—拉瑙德方法

同样，在第二公理系统下，这种算法成功的可能性也有限：

算法 8.3(阿罗—拉瑙德的基本算法) 第 r 步：从当前优序矩阵的每一行中找出最大值 a_{ij}。这些最大值中至少有一个比其余的都小。如果有许多相同的值，则随意挑选出其中一个。这个最小值所在行对应一备择对象，这个备择对象在多准则排序中将排在第$(n-r+1)$位。若 $r<n$，则消去优序矩阵中的相应行和列，以获得第$(r+1)$步的当前优序矩阵。当优序矩阵为空时，这个算法就中止。

定理 8.5 即使常和特性不成立，解也不惟一，阿罗—拉瑙德算法仍会产生属于 $R_{\underline{\beta}+1}$的一个序，且逐次最大值中的最小值等于$\underline{\beta}$。

证明：将阿罗—拉瑙德算法应用于我们的优序矩阵，至少可以得出一个排序 O。最大值中最小值的最大值至少对应一个系数 a_{sr}。设 O^+ 是 O 的逆序。在按 O 列出的优序矩阵中，O^+ 的优序系数都在主对角线下。容易证实，$a_{sr}=\max_{(i,j)\in O^+}a_{ij}$。这个系数在主对角线下，是以假定 S 大于 r 这种方式构造的。设 O' 是另一序，有 $b=\max_{(i,j)\in O'}a_{ij}$。如果 O 包含 $R_{\underline{\beta}+1}$，则意味着 a_{sr}小于或等于$\underline{\beta}$，而它是不属于 $R_{\underline{\beta}+1}$的备择对象对的优序系数的最大值。其余对都属于 O，这样就不会形成任何循环序。如果对任何 O'，b 都大于或等于 a_{sr}，那么 O 中不含循环序部分的阈值将是最低可

能的，且 a_{sr} 会等于 $\underline{\beta}$。

设 Y 是 O 中在 x_s 前的对象所组成的集合。在 O' 中，如果 x_s 在 Y 的元素之后，那么由于 x_r 属于 Y，所以 a_{sr} 将还在按 O' 列出的优序矩阵的主对角线下。这样，主对角线下的最大元素 b 大于或等于 a_{sr}。在 O' 中，如果 x_s 不排在 Y 的元素之后，它至少在 Y 的元素 y 之前，y 是 $(Y+x_s)$ 中的最后一位。现用 $O'(Y+x_s)$ 来代表 O' 对 $(Y+x_s)$ 中的元素的限制：

$$b = \max_{(i,j)\in O'} a_{ij} \geqslant \max_{(i,j)\in O'(Y+x_s)} a_{ij}$$

它本身大于子矩阵中 y 对应行的最大 a_{ij}，子矩阵由 $(Y+x_s)$ 中的备择对象组成，这是因为当它应用于相同子矩阵时，算法选择另一行。从中可以得出，这个最后的最大值必定大于或等于 x_{sr}。

当然，阿罗－拉瑙德算法和科赫勒对偶算法是相似的。显然，在附加的常和假设下，所有这些结论都可以从第一公理系统中直接推出。可是，值得注意的是，两种不同类型算法应用于常和矩阵，最终极有可能获得不同的谨慎序解：逐次消去过程与逐次选入过程是有显著差异的！例如，考虑侧面 3241，2143，1324，4213，4312，4132，1234，它的优序矩阵是：

X	4	5	3
3	X	3	4
2	4	X	3
4	3	4	X

每种算法产生五个解。四个是两种算法的共同解：1234，1324，2413，4132。阿罗－拉瑙德算法产生 4123，科赫勒算法则不能；而科赫勒算法产生 1432，阿罗－拉瑙德算法则不能。

小而简单的例子是很难找到的，这是因为这种例子必须说明，在第一和最后对象间必定缺失有效信息，并产生适当多的谨

慎序。当然，如果常数和特性成立，则阿罗一拉瑞德基本算法（在结果上）是会与科赫勒对偶算法一致的，而科赫勒基本算法也会与阿罗一拉瑞德对偶算法一致。

在这四个算法的形式叙述中，只出现了公理 7.4 Ⅰ 和公理 7.4 Ⅱ。但根据不同序贯谨慎原则（例如，定义 7.1 和定义 7.2）对公理7.5的要求放宽后，其处理方法却相似。以相同技术可直接证明，这些算法能辨识出 $\bar{\alpha}$ 和$\underline{\beta}$，且均能导出被 $R_{\bar{\alpha}}$包含或包含 $R_{\underline{\beta}+1}$的序。

8.4 附注

定理 8.6 如果谨慎序是惟一的，那么只有与科赫勒算法相符的算法才能序贯地揭示这个谨慎序。

证明：假定惟一谨慎序 O 已得出，优序矩阵已按 O 排出，那么，优序矩阵第一行是惟一确定的，其中所有系数均大于或等于 $\bar{\alpha}$，在另一行中至少有一系数是严格小于 $\bar{\alpha}$。这样，科赫勒准则可在 O 中检出第一备择对象。该方法必定有序贯性，这个事实证明了其余部分的结果。

在包含公理 7.4 Ⅰ 和公理 7.4 Ⅱ 的公理系统领域里，至少还有三个有趣的猜测：

在常数和情况下，阿罗一拉瑞德和科赫勒算法构建了全部谨慎序。

一旦能够合适地定义“序贯地包含 $R_{\underline{\beta}+1}$”的概念，科赫勒对偶和阿罗一拉瑞德算法就足以建立符合该要求的所有序。

相似地，阿罗－拉瑙德对偶和科赫勒算法足以建立“序贯地被 R_a包含”的所有序。

本书的目的在于提出新的问题，而不在于结束旧的问题，我们有一个可能不幸被遗忘的希望！我们考虑了好久，在常数和情况下，科赫勒算法或许能由一个更简单的公理系统来勾画其特征，其中最终的公理只是：

(1)排序是通过逐次的过程获得的，每一步都是排出下一个备择对象。

(2)在每一步中，相关数据包含在给定侧面对尚未排好的备择对象的限制中。

(3)这个结果必定是一个谨慎的序。

无论多“松散”，这个序贯独立性都有许多重要的作用：有了它就易于将评价函数与尚未排好的每个备择对象联系起来，也容易将这种函数的评价集定义为优序系数的集合，在这个集合上，评价函数应可以对每个剩余备择对象进行计算。

由于常和特性，还可以表明在每一当前步骤中，一个备择对象的评价函数就是优序矩阵中它所在的行(或列)系数的一个对称函数。仅此就足以证明，研究区分主控或受控的方法是必要的。

还容易指出，包含在这些公理中的独立性概念，摒弃了博尔达方法(考虑侧面$\{abcd, bcda, cdab, dabc, dcba\}$)和克梅尼方法(考虑侧面$\{abcd, dacb, cbda\}$)。容易验证，克梅尼解是惟一的。它是$acbd$，且有 $\sum a_{ij}=11$。除了 $a_{ij}=2$ 这一对以外，这个解包含所有其他的对。按照公理，评价集必须是优序矩阵的行，优序矩阵是：

X	2	2	1
1	X	1	2
1	2	X	2
2	1	1	X

第1行与第3行、第2行与第4行正好是它们的系数的置换。这样，在这两种情况下，选择第一对象时就出现了等价项，克梅尼方法对此至少该给出两个解。

但我们尚不能识别满足这个简单系统的所有方法。

我们想以另一个关于有效方法的未解决问题结束本章。考虑所有序贯谨慎的算法。某种程度上，算法的评价函数是一种约束准则，它要求将多准则排序最优化多准则排序的优良性的一种约束。我们最终希望得到一个排序，其最小的系数尽可能大；为了确定下一个最优分割，我们的方法是从可有分割中选出最可能出现最小系数的分割。

在任何序贯优序算法中，为了确定下一次的分割，人们会将评价函数应用于评价集。假定优序的目标函数是定义在优序系数集合上的(优序系数是这个序中的每一对所对应的值)。如果目标函数和评价函数能被认为是"一样的"，则所考虑的优序方法可以被认为是有**延拓性**的。我们将"一样的"写在引号内是因为，当函数应用于基数型的集合时，显然不能轻易说函数具有等同性，这样我们的提法就不十分精确了。本章中，我们已经描述了一系列可以认为是"延拓性"的方法。但一个有价值的问题还未解决：如果用**所用方法必须是"延拓性"**的这一公理来代替公理7.5，发现这个条件能在多大程度限制这些解的范围会很有意思。

附录 1　依莱克托法 I 简述

决策者不得不作一个决定，从一个有限的备择对象集合中挑选出最好的，他知道有关有限准则集的一些值。更精确地说，决策者知道：

(1)每一个准则给出的包含全部备择对象的一个弱序(有结*的完备关系)。

(2)必须给所有准则赋予正的权数。

(3)必须能对每一步后的元素规模提供一个数量价值。换言之，决策者必须能对所有准则给出牺牲率。

(4)决策者也应决定三个数 c、d、s 的值。第一个数 c，称为"一致阈"。设 W_{xy}是将 x 排在 y 前或排成一样的准则的权重之和，W 是所有准则权重的和。为了符合中选条件，成对偏好必须"满足一致性筛选"，即 x 比 y 好是一个合格的偏好关系，当且仅当 $W_{xy}/W \geqslant c$。

其他两个数 d 和 s，用于描述不一致性的筛选；d 是正实数而 s 是一整数。再考虑偏好"x 比 y 好"，假定它满足一致性筛选。相反地，考虑排出 y 比 x 好(严格好)的另一类准则，它们被

* "结"是指在序中几个对象的名次相同。——译者注

称为不一致准则。每个不一致准则按各自的尺度给出 y 与 x 之间的距离值(计量单位相同),将它们由大到小排列。用 D_{xy}表示这份清单中第 $s+1$ 位置上的值,称它为“x 好于 y”这个偏好的不一致性。偏好“满足不一致性筛选”当且仅当 $D_{xy} \leqslant d$。

在依莱克托(Electre)中,满足两种筛选的偏好放在一起组成了“优序关系”。不被其他任何元素优控的元素组成的子集被定义为一个关系的**基集**,优序关系的基集就是按依莱克托法选出的元素。

对这个方法的批评,可以归为以下三点:

(1)基集时常是空的!(2)实践中,为了获得满足决策者愿望的入选集合,或有时为了获得一个非空基集,顾问们会调整对阈、权重或牺牲率的选择。这点是大部分人摒弃依莱克托法的一个原因。(3)如果具备了建立线性效用函数所需的元素,为什么还要用依莱克托法这样复杂的方法呢?

附录 2　怎样识别可能存在的参照序，依据它，给出的侧面会是布莱克型吗？

从阿兹台克(Aztec)金字塔形的顶部到底部所作的蛇形摆动，具有非常墨西哥式的启示，向罗米罗暗示了问题的解。

金字塔形

金字塔形是来自于有限集合的符号所组成的一特殊数组，例如，考虑集合 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$。以 123456 作为参照序，可构建关于 X 的一金字塔形如下：

```
               6 1
             5 1 6 2
           4 1 5 2 6 3
         3 1 4 2 5 3 6 4
       2 1 3 2 4 3 5 4 6 5
     1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6
```

沿着相同符号重复的路线观察，金字塔形的结构就变得清晰了。

关于 $X=\{1,2,3,\cdots,n\}$的一个金字塔形，显示为：

							1	n							
						2	n	1	$n-1$						
					3	n	2	$n-1$	1	$n-2$					
					n	3	$n-1$	2	$n-2$	1					
			$n-3$			$n-1$	3	$n-2$	2			4			
		$n-2$	n	$n-3$						2	4	1	3		
	$n-1$	n	$n-2$	$n-1$	$n-3$	$n-2$			3	4	2	3	1	2	
n	n	$n-1$	$n-1$	$n-2$	$n-2$	$n-3$			4	3	3	2	2	1	1

蛇形

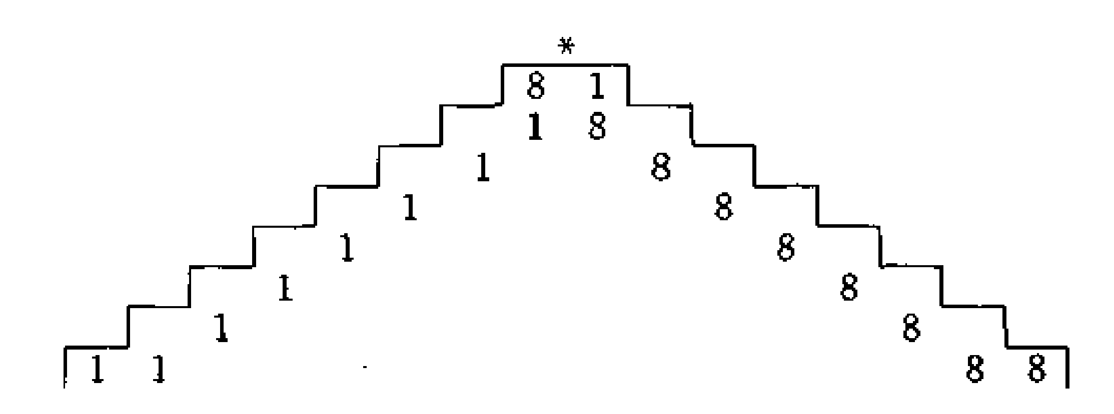
蛇形是勾画出金字塔形特殊设计的符号组成的一个序列。蛇形的最后元素是金字塔形顶部两元素中的一个。倒数第二元素是两元素中的一个，这两个元素包含在紧接在刚入选元素所在位置下面的三个位置之中，并且是前面未曾入选的。通过例子，它将变得清楚些：435261，345216，546321，453216 是对应于上面第一个金字塔形的蛇形。

罗米罗算法的原则

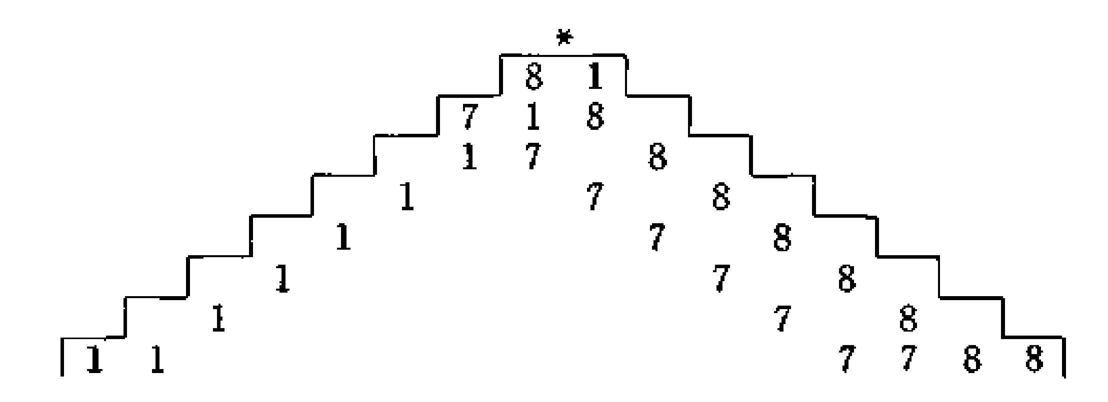
通过对 n 的归纳，容易证明，蛇形与服从布莱克条件的序是一致的，在金字塔形的最底层，从右到左或从左到右，可以读出参照序。对于有限集上给定的全序集合，算法原则是看看金字塔形蛇形建立的全序能否会包含它们。这可以通过一个例子来描述：考虑 $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$上的全序集合 32456781，45362718，65432178。

为了简明描述问题的可能解,需要引入中枢这一概念,用“*”来代表它,并用下面的方式来阐明。假定两个金字塔形是该问题的解,两个金字塔形互为镜像关系(它只是左换到右,或相反)。约定只具体表示一个金字塔形,其上加注“*”。

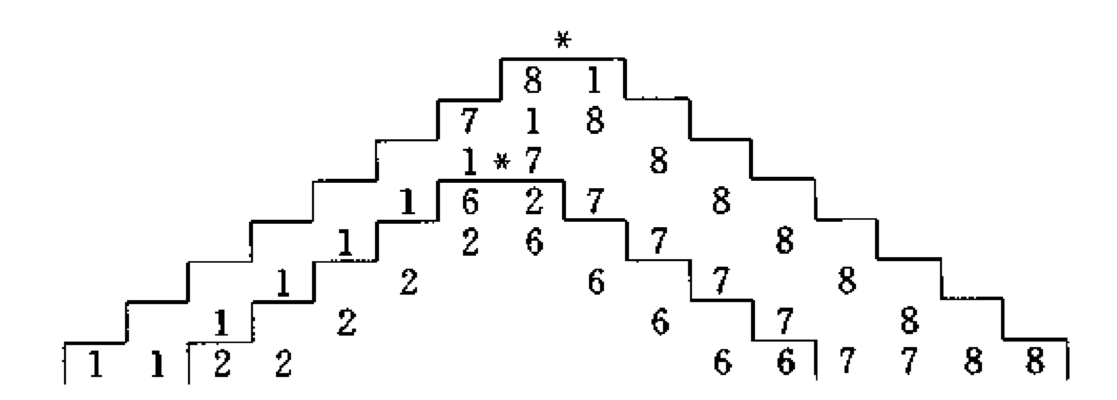
接着,列出问题中三个序的最后元素,形成解金字塔形。如果存在的话,那么它一定是如下形状:



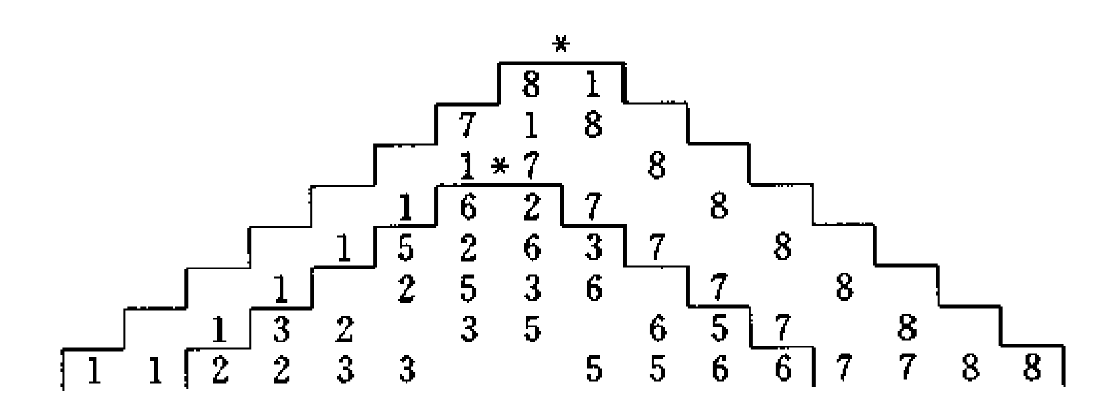
最后两个元素的展示表明,7必须放在顶行下面,则可按以下方式填充金字塔:



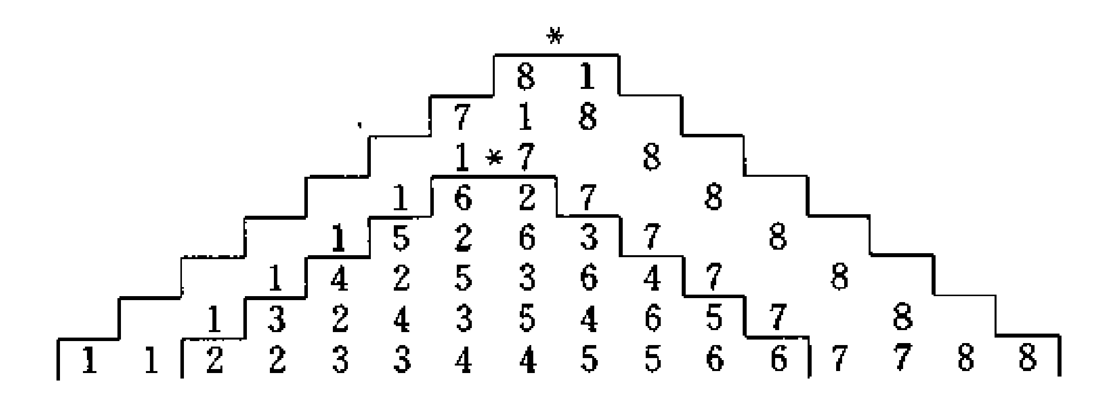
三个准则给出的倒数第三元素不能提供更多信息,因为他们与已部分设计的金字塔形是相容的。相反,接下来的元素指出,元素6和2可以同在“子金字塔形”的顶点而不冲突,“子金字塔形”包含在第一个金字塔形中,但用一中枢从中分离出来,可以表示如下:



准则示例的下一步显示出，元素 5 和 3 必须以惟一的方式展示在小金字塔形内：



为元素 4 所留的位置是惟一的，但易检出，这与准则不矛盾：



这样，给定侧面可以看成是布莱克侧面，其参照序是 12345678，87654321，16543278，87234561。

我们必须指出，罗米罗算法虽然形式不够直观，但它只需用对准则的一个简单示例就能验明。其计算时间随备择对象的个数而线性增长。但是，正如我们所知，大的布莱克侧面甚少，所以，如对包含许多不同准则的一个侧面作计算，在开始不久就得出结果可能是不可能的。

参考文献

[1] Abello J. [1981] Toward a maximum consistent set. Technical Report 1-1, Department of Computer Science, University of California, Santa Barbara

[2] Abello J. [1985] Intrinsic limitations of the majority rule, an algorithmic approach, SIAM *Journal on Algebraic and Discrete Methods* 6:133～144

[3] Arrow K J. [1951] *Social Choice and Individual Values.* New York: Cowles Foundation and Wiley

[4] Arrow K J. [1963] *Social Choice and Individual Values.* New, Haven, Connecticut: Yale University Press, second edition

[5] Bernard G and Besson M L. [1971] Douze methodes d' analyse multicritère. *Revue Franfaise d' Informatique et de Recherche Operationelle* 5:19～64

[6] Black D. [1948] On the rationale of group decision-making, *Journal of Political Economy* 56:23～34

[7] Black D. [1958] *The Theory of Committees and Elections.* Cambridge: Cambridge University Press

[8] Black D and R. A. Newing [1951] *Committee Decisions with Complementary Valuations.* London: William Hodge & Co.

[9] Blin J M. [1973] The general concept of multidimensional consistency: some algebraic aspects of the aggregation problem, *In Multiple-Criteria Decision-Making.* Columbia, SC: University of South Carolina Press

[10] Borda J C. [1781] *Mèmoire sur les Élections au Scrutin.* Paris: Mèmoires de l' Academie des Sciences

[11] Condorcet M J A M Caritat, Marquis de [1785] *Essai sur l' Analyse à la*

Probabilitè des Dècisions rendues à la pluralitè des voix. *Paris*: L' Imprimerie Royale

[12] Coombs C H. [1954] Social choice and strength of preference, In R. M. Thrall, C. H. Coombs, and R. L. Davis(eds.), Decision Processes. New York: Wiley

[13] Coombs C H. [1964] *A Theory of Data*. New York: Wiley 395～397

[14] Craven J. [1971] Majority voting and social choice. *Review of Economic studies* 38: 265～267

[15] Duncker K. [1903; translated in 1945] *On Problem Solving*. Washington, DC: American Psychological Association, Psychological Monographs58, No. 5

[16] Dutta B and Pattanaik P K. [1978] On nicely consistent voting systems. *Econometrica* 46: 163～179

[17] Ebbinghaus H. [1885; translated in 1964] *Memory*. New York: Wiley

[18] Eckenrode R T. [1965] Weighting multiple criteria, *Management science*12: 180～192

[19] Farquharson R. [1969] *Theory of Voting*. New Haven: Yale University Press

[20] Ferejohn J and Gretber D. [1974] Rational social decision procedures, *J. Econ. Theory* 8: 471～482

[21] Fine B and Fine K. [1974] Social choice and individual ranking, Ⅰ and Ⅱ. *Review of Economic Studies* 41: 303～322, 459～475

[22] Fishburn P C. [1970] *Utility Theory for Decision Making*. New York: Wiley

[23] Fishburn P C. [1973] *The Theory of Social Choice*. Princeton, NJ: Princeton University Press

[24] Fishburn P C, Gehrlein W V and Maskin E. [1979] Condorcet's proportions and Kelly's conjecture. *Discrete Applied Mathematics* 1: 229～252

[25] Gibbard A. [1973] Manipulation of voting schemes: a general result. *Econometrica* 41: 587～601

[26] Gilbaud G Th. [1968] *Elèments de la Thèorie Mathèmatique des Jeux*. Paris: Dunod, Monographies de Recherche Opérationnelle

[27] Inada K-I. [1964] A note on the simple majority decision rule. *Econometrica* 32: 525～531

[28] Johnsen E. [1968] *Studies in Multiobjective Decision Models*. Lund: Berlingska Boktryekeriet, Economic Research Center in Lund, Student Litteratur, Mono-

graph # 1

[29] Kemeny J G and Snell J L. [1960] *Mathematical Models in the Social sciences*, Boston: Ginn

[30] Köhler G. [1976] La prévention de l'effet Condorcet et quelques propriétés du graphe de surclassement pour les seuils 0 à 100%. Mémoire de DEA de Recherche Opérationelle, mimeo, Université Scientifique et Médicale de Grenoble

[31] Köhler G. [1978] *Choix Multicritère et Analyse Algébrique des Données Ordinales*. Thesis of the 3rd Cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble (France)

[32] Kramer G H. [1973] On a crass of equilibrium conditions for majority rule, *Econometrica* 41: 285～297

[33] Kramer G H. [1976] A note on single-peakedness. *International Economic Review* 17: 498～502

[34] Kramer G H. [1977] A dynamic model of political equilibrium. *Journal of Economic Theory* 16: 310～334

[35] Levenglick A and Young H P. [1978] A consistent extension of Condorcet's election principle. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 35: 285～300

[36] Meslow A H. [1954] and [1970] *Motivation and Personality*. New York: Harper & Row

[37] May K O. [1952] A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision. *Econometrica* 20: 680～684

[38] Morton G. [1966] Inada, Ken-ichi: a note on the simple majority decision rule, *Mathematical Reviews*, 194: Review No. 1119

[39] Niemi R G and Weisberg HF. [1968] A mathematical solution for the probability of the paradox of voting. *Behavioral Sciences* 13: 317～323

[40] Peleg B. [1978] Consistent voting systems. *Econometrica*, 46: 153～170

[41] Raynaud H. [1979] A propos de quelques conditions de transitivité de la méthode majoritaire bien connues, Colloque Aide à la Decision et Jeux de Stratégies: Aspects Multi-Critères, Bruxelles Institute des Hautes Etudes

[42] Raynaud H. [1981a] Paradoxical results from inada's conditions for majority rule, Technical Report 331, Center for Research on Organizational Efficiency, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Encina Hall, Stanford U-

niversity

[43] Raynaud H. [1981b] Conditions for transitivity of majority rule with algorithmic interpretations. Technical Report 347, Center for Research on Organizational Efficiency, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Encina Hall, Stanford University

[44] Raynaud H. [1981c] How restrictive actually are the value restriction conditions. Technical Report 348, Center for Research on Organizational Efficiency, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Encina Hall, Stanford University

[45] Raynaud H. [1982] The individual freedom allowed by the value restriction conditions. Technical Report 360, Center for Research in Organizational Efficiency, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Encina Hall, Stanford University

[46] Romero D. [1978] *Variations sur l'Effet Condorcet*. Thesis of the 3rd Cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble(France)

[47] Satterthwaite M A. [1975] Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory* 10:187～217

[48] Sen A K. [1966] A possibility theorem on majority decisions, *Econometrica* 34: 491～499

[49] Smith J H. [1973] Aggregation of preferences with variable electorate. *Econometrica* 41:1027～1042

[50] Susmann B, Gremy J-P., Marc M and Buffet P. [1967] Peut-on choisir en tenant compte de critères multiples? Une méthode (ELECTRE) et trois applications. Metra 6:283～316

[51] Ungar G. [1973] Evidence for molecular coding of neural information. In H. P. Zippol (ed.) *Memory and Transfer of information*, New York and London: Plenum 317～341

[52] Ward B. [1965] Majority voting and alternative forms of public enterprise. In J. Margolis (ed.), *Public Economy of Urban Communities*. Baltimore: Johns Hopkins Press 112～126

[53] Young H P. [1974] An axiomatisation of Borda's rule. *Journal of Economic Theory* 9:43～52

[54] Young H P. [1975] Social choice scoring functions. ,*Siam Journal of Applied Mathematics* 28:824~838

[55] Yu P L. [1979] Behavior bases and habitual domains of human decision/behavior. In G. Fautel and T. G. Gale (eds.), *Multiple Criteria Decision-Making ; Theory and Application*. Heidelberg: Springer Verlag

中英文名词对照索引

A

C

D

E

F

G

H

J

K

M

N

P

S

X

Z

肯尼思·阿罗主要作品年表

1933　1. with Wald A. Uber die Eindeutige Postive Losbarkeit der Neuen Produktionsgleichungen. Ergebnisse Eines Mathematischen Kolloguiums, 6, Wien, 1933～1934

1936　2. with Wald A. Uber die Produktionsgleichungen. Ergebnisse Eines Mathematischen Kolloguiums, 7, Wien, 1936

3. with Wald A. Uber Einige Gleichungssystems der Mathematischen Okonomie. Zeitschrift fur National Okonomie, 1936, 7

1942　4. with Lange O. The Foundation of Welfare Economics. Econometrica, 1942, 10

1950　5. A Difficulty in the Concept of Social Welfare. Journal of Political Economy, August 1950, 58: 328～346

1951　6. Social Choice and Individual Values, Monograph 12, Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, First Published. John Wiley and Sons, Inc,

1951;2nd ed. New Haven and London; Yale University Press, 4th Printing, July 1970

7. An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics. In: Neyman J. ed. Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles, 1951

8. with Harris T E and Marschak J. Optimal Inventory Policy. Econometrica, 1951, 19

9. Mathematical Models in the Social Sciences. In: Lerner D. and Laswell H D. eds. The Policy Sciences, Stanford, California, 1951

10. Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risktaking Situations. Econometrica 1951, 19

1953 11. Le Role des Valéurs Boursieres Pour la Repartition la Meilleure des Risques. Econometrie, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientific, Vol XI, Paris, 1953

1954 12. with Debreu G. Existence of Equilibrium for a Competitive Economy. Econometrica, 1954, 22

1956 13. with Enthoven A C. A Theorem on Expectations and the Stability of Equilibrium. Econometrica, 1956, 24

1958 14. with Hurwicz and Uzawa. Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production. Stanford University Press, 1958

15. with Hurwicz L and Uzawa H. Studies in Linear and Non-Linear Programming. Stanford University Press, 1958

16. Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. Econometrica, 1958

17. with Nerlove M. A Note on Expectations and Stability. Econometrica, 1958, 26

18. Studies in Mathematical Theory of Inventory & Production In: with Karlin S and Scarf H. ed. Stanford, California. 1958

19. The Measurement of Price Changes. In: Joint Economic Committee, The Relationship of Prices to Economic Stability and Growth. Washington, D C, 1958

1959 20. with Block H D and Hurwicz L. On the Stability of the Competitive Equilibrium, Ⅱ. Econometrica, 1959, 27

21. Price-quantity Adjustments in Multiple Markets with Rising Demands. In: Arrow K, Karlin S and Suppes P. eds. Mathematical Methods in Social Sciences. Stanford, Calif., 1959

22. Toward a Theory of Price Adjustment. In: Abramovitz M and Others eds. The Allocation of Economic Resources..Stanford University Press. Stanford, 1959. 41～51

23. with Debreu G. Theory of Value. New York, 1959.

24. On the Stability of the Competitive Equilibrium, Part Ⅰ, 1958 and Part Ⅱ, 1959

25. Mathematical Methods in the Social Sciences. Stanford University Press, 1959

1960 26. with Hurwicz. Competitive Stability under Weak Gross Substitutability the Euclidean Distance Ap-

proach. Int., Ec. Rev., 1960, 1

27. with Hurwicz L. Some Remarks on the Equilibria of Economic Systems. Econometrica, 1960, 28

28. with Hurwicz L. Decentralisation and Computation in Resource Allocation. In: R. W. Pfouts ed. Essays in Economics and Econometrics. Chapel Hill, N C, 1960

29. The Work of Ragnar Frisch: Econometrician. Econometrica, 1960, 28

1961 30. with Chenery H R, Minhas B and Solow R M. Capital-labor Substitution and Economic Efficiency. Rev. of Economics and Statistics, 1961, 43

1962 31. Economic Welfare and the Allocation of Resources for Invention. In: Richard Nelson ed. The Rate and Direction of Inventive Activity. Princeton Univ. Press, Princeton, 1962

32. Studies in Applied Probability and Management Science. Stanford University Press, 1962

33. The Economic Implications of Learning by Doing. The Review of Economic Studies, 1961 ~ 1962, 29: 155 ~ 173

1964 34. The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing. The Review of Economic Studies, April 1964, 31: 91 ~ 96

1965 35. Aspects of the Theory of Risk Bearing. Helsinki, 1965

1967 36. Samuelson Collected. Journal of Political Economy, 1967, 75

37. with Kornai J. Mathematical Planning of Structural

Decision. Amsterdam, 1967

1968 38. with Girshick Meyer. A International Encyclopaedia of Social Sciences. In: Sills David L ed. Vol Ⅵ. Macmillan and Free Press, 1968. 191～192

39. Economic Equilibrium. In: Sills David L ed. International Encyclopaedia of the Social Sciences. Vol. Ⅳ. Macmillan and Free Press, 1968. 376～389

40. with Leijonhufvud A. On Keynesian Economics and the Economics of Keynes. Oxford University Press, 1968

41. with Murakami Y. Logic and Social Choice. London, 1968

42. with Tullock G. Towards a Mathematics of Politics. Ann. Arbor, 1968

43. Optimal Capital Policy with Irreversible Investment. In: Wolfe J N. ed. Value, Capital and Growth. Edinburgh, 1968

1969 44. Tullock and an Existence Theorem. Public Choice, 1969, 6

45. The Organization of Economic Activity: Issues Pertinent to the Choice of Market Versus Non-market Allocation. In: Joint Economic Committee, U S Congress, 1969. The Analysis and Evaluation of Public Expenditures: The PPB System, Vol 1, Washington, 1969

46. Readings in Welfare Economics. In: Kenneth Arrow and Tibor Scitovsky eds. American Economic Associa-

tion Series. George Allen and Unwin Ltd., 1969. 2nd Impression, 1972

1970 47. with Kurz M. Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy. Baltimore, 1970

48. with Sen P K. Collective Choice and Social Welfare. San Francisco and Edinburg, 1970

1971 49. Essays in the Theory of Risk Bearing. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London, 1971

50. with Hahn F H. General Competitive Analysis. North-Holland, 1971

1974 51. The Limits of Organisation. New York: W. W. Norton and Co. Inc, 1974

52. with Walras L. Elements d'economic Politique Pure. Lausanne, 1974

1977 53. with Leonid Hurwicz. Studies in Resource Allocation Processes. Cambridge University Press, 1977

54. Toward a Theory of Price Adjustment. In: Baran P A. and Others eds. The Allocation of Economic Resources. Stanford University Press, 1977; 10th Impression, 1986

1981 55. Pareto Efficiency with Costly Transfers. In: Assorodobrajkula N and Others eds. Studies in Economic Theory and Practice: Essays in Honour of Edward Lipinski. North-Holland Publishing Co, 1981. 73～86

56. Government Regulation: Pluses and Minuses - An Essay. In: Harper's Magazine with Permission in Economic Impact, 1981/3, International Communication

Agency, U S A, Washington, D C, 1981. 68~73

1984 57. Collected Papers of Kenneth J. Arrow. Vol I, Social Choice and Justice; Vol Ⅱ, General Equilibrium; Vol Ⅲ, Individual Choice under Certainty and Uncertainty; Vol Ⅳ, The Economics of Information. Basil Blackwell Ltd, 1984

1985 58. with Intriligator M D. Handbook of Mathematical Economics, Vol 3. North-Holland, Amsterdam, 1985

59. with Honkapohja S. Frontiers of Economics. Blackwell, Oxford, 1985

60. The Potentials and Limits of the Market in Resource Allocation. In: Feiwel G R. ed. Issues in Contemporary Microeconomics and Welfare. London: Macmillan, 1985. 107~124

61. Distributive Justice and Desirable Ends of Economic Activity. In: Feiwel G R. ed. Issues in Contemporary Macroeconomics and Distribution, London: Macmillan, 1985. 134~156

62. The Informal Structure of the Firm. American Economic Review: Papers and Proceedings, 1985, 75(2): 303~307

63. Maine and Texas. American Economic Review: Papers and Proceedings, 1985, 75(2): 320~323

64. The Economics of Agency. In: Pratt J W and Zeckhauser R J. eds. Principles and Agents: The Structure of Business, Chapter 2. Harvard Business School Press, Boston, 1985. 37~51

1987 65. General Economic Theory and the Emergence of Theories of Economic Development. Presidential Address to the Eighth World Congress of the International Economic Association held at New Delhi on December 1, 1986; Reproduced in The Indian Economic Journal, April~June 1987, 34(4): 1~8

1992 66. General Economic Equilibrium: Purpose, Analytic Techniques, Collective Choice, Nobel Memorial Lecture, December 12, 1972. In: Lindbeck, Assar ed. Economic Sciences: 1969~1980. Nobel Lectures, World Scientific, Published for the Nobel Foundation, 1992. 109~131